單元 1: 基本數學複習
(課本第 0 章)

目的: 數學內容在高中時都已學過, 旨在熟悉所對應的英文及定義, 俾使日後學習時, 能越過因語言而來的障礙, 或因定義不清而造成的模糊.

一. 實數 (Real Numbers)

所有的實數可用一坐標系統 (coordinate system) 表示之, 此坐標系統亦稱作實數線 (real line), 或 x-軸 (x-axis), 如下圖所示.

其中有 1-1 對應 (one-to-one correspondence) 的關係, 亦即, 實數線上的每一點都對應到唯一的一實數; 反之, 每一實數都對應到實數線上的唯一點.

註. 實數的分類: 實數可分成有理數及無理數兩類, 其中有理數乃指可表成二整數的比值 (ratio, 亦即, 分數) 的數, 如

$$\frac{7}{8} = 0.875$$

乃一有限小數 (terminating decimal),

$$\frac{12}{7} = 1.\overline{714285}$$

乃一無窮循環小數 (infinitely repeating decimal);
無理數乃非有理數的數, 無法以有限小數或無窮循環小數表示, 但可以小數近似值 (decimal approximation) 估計之, 如

$$\sqrt{2} \approx 1.41421$$

$$\pi \approx 3.14159$$

$$e \approx 2.71828$$

二. 區間 (Intervals)

1. 開區間 (open interval):

$$(a, b)$$

乃指所有介於 a 與 b 之間的實數所成的集合, 不含兩個端點 a 與 b, 亦可以

$$a < x < b$$

表示, 如下圖.

2. 閉區間 (closed interval):

$$[a, b]$$

乃指所有介於 a 與 b 之間的實數, 以及 a 與 b 兩個端點所成的集合, 亦可以

$$a \leq x \leq b$$

表示, 如下圖.

3. 非開亦非閉區間 (neither open nor closed interval): 只包含一個端點的區間, 如

$$(a, b] \text{ 或 } a < x \leq b$$

乃是僅包含右端點 b 的集合, 如下圖;

$$[a, b) \text{ 或 } a \leq x < b$$

乃是僅包含左端點 a 的集合, 如下圖.

4. 無窮區間 (infinite interval): 至少有一端是無界的區間, 如

$$(-\infty, a) \text{ 或 } x < a$$

乃指左端無界, 所有小於 a 的實數所成的集合, 如下圖;

$$(-\infty, a] \text{ 或 } x \leq a$$

乃指左端無界, 所有小於或等於 a 的實數所成的集合, 如下圖;

$$(b, \infty) \text{ 或 } x > b$$

乃指右端無界, 所有大於 b 的實數所成的集合, 如下圖;

$$[b, \infty) \text{ 或 } x \geq b$$

乃指右端無界, 所有大於或等於 b 的實數所成的集合, 如下圖;

$$(-\infty, \infty) \text{ 或 } -\infty < x < \infty$$

乃指兩端均無界, 所有實數所成的集合.

註. ∞ 與 $-\infty$ 不是實數, 乃是兩個符號, 其中 ∞ 表示正無窮大 (plus infinity), 所有實數均在其左邊; $-\infty$ 表示負無窮大 (minus infinity), 所有實數均在其右邊.

三. 解不等式 (Solving Inequality)

事實: 一多項式僅在其實根 (real zeros) 處變號, 由 (+) 變 (−), 或由 (−) 變 (+), 亦即, 設多項式

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

其中 $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$, 則 $P(x)$ 在所分割的 $n+1$ 個區間內的符號如下圖. 故, $P(x)$ 在每一個區間內只可能有一符號, 不是 $(+)$ 就是 $(-)$.

例如, 解

$$x^2 < x + 6$$

相當於解

$$x^2 - x - 6 < 0$$

經由因式分解, 亦相當於解

$$(x-3)(x+2) < 0$$

接著根據二實根 -2 與 3 所分割的三個區間決定

$$P(x) = (x-3)(x+2)$$

在每個區間內的符號, 如下述:

$(-\infty, -2)$: 代此區間內的任一數, 如 -3, 得

$$P(-3) = (-)(-) = (+)$$

故 $P(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 內爲正, 大於 0;

$(-2, 3)$: 代此區間內的任一數, 如 0, 得

$$P(0) = (-)(+) = (-)$$

故 $P(x)$ 在 $(-2,3)$ 內爲負, 小於 0;

$(3,\infty)$: 代此區間內的任一數, 如 4, 得

$$P(4)=(+)(+)=(+)$$

故 $P(x)$ 在 $(3,\infty)$ 內爲正, 大於 0, 如圖示.

因此, $P(x)$ 僅在區間 $(-2,3)$ 內是小於 0, 故得

$$-2<x<3$$

例 1. 設某工廠每日的固定經常費 (fixed overhead cost) 爲 \$500, 且生產某產品一單位 (unit) 的成本 (cost) 爲 \$2.50. 若在八月份內, 最高及最低的生產總成本 (total cost of production) 分別爲 \$1,325 及 \$1,200. 試求這個月的最高及最低產量 (production level).

<解> 設 x 爲產量. 因爲

$$\text{總成本} = \text{固定成本} + \text{生產成本}$$

故總成本

$$C=500+2.5x$$

又已知

$$1200 \leq 500 + 2.5x \leq 1325$$

故原問題相當於解 x. 將上式同減 500, 得

$$700 \leq 2.5x \leq 825$$

同除 2.5, 得

$$280 = \frac{700}{2.5} \leq x \leq \frac{825}{2.5} = 330$$

因此, 最高生產量為 330 單位, 且最低生產量為 280 單位.

四. 絕對值 (Absolute Value)

對任一實數 a, a 的絕對值

$$|a| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a, & \text{若 } a \geq 0 \\ -a, & \text{若 } a < 0 \end{cases}$$

1. 性質:

$$|ab| = |a||b|; \ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$$

以及

$$|a^n| = |a|^n; \ \sqrt{a^2} = |a|$$

如

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = -(-5) = 5$$

2. 實數線上二點 x_1 與 x_2 間的距離 (distance)

$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$$

3. 含絕對值的二不等式: 設 a, d 爲二實數, 且 $d > 0$.

(i) $|x-a| \le d$ 乃相當於與 a 的距離小或等於 d 的點 x 所成的集合, 故

$$a - d \le x \le a + d$$

如圖示.

(ii) $|x-a| \ge d$ 乃相當於與 a 的距離大於或等於 d 的點 x 所成的集合, 故

$$x \le a - d \text{ 或 } x \ge a + d$$

如圖示.

例 2. **品管**. 根據統計方法得某產品的瑕疵率 (defective rate) 爲 $0.35\% \pm 0.17\%$. 若廠商針對

每件有瑕疵的產品提供退錢保證 (money-back guarantee), 試問需要多少預算以達成 100,000 件產品的退費保證? (設每件產品的售價爲 \$8.95)

<解> 設 r 爲瑕疵率. 由假設知,

$$0.0035 - 0.0017 \le r \le 0.0035 + 0.0017$$

亦即,

$$0.0018 \le r \le 0.0052$$

令 x 爲 100,000 件產品中的瑕疵數. 得

$$0.0018(100,000) \le x \le 0.0052(100,000)$$

亦相當於

$$180 \le x \le 520$$

令 C 爲退費總額, 則

$$180(8.95) \le C \le 520(8.95)$$

也就是說,

$$\$1611 \le C \le \$4654$$

故, 最保險的預算爲 \$4654 (上界); 但由統計的觀點, 最具代表性者爲上, 下界的平均值

$$\frac{\$1611 + \$4654}{2} = \$3132.5$$

五. 次方與方根 (Exponent, Radical)

(1) 性質:

1. $x^n = x \cdot x \cdots x$, 亦即, x 自乘 n 次

2. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, $x \neq 0$

3. $x^0 = 1$, $x \neq 0$

4. $\sqrt[n]{x} = a$ 相當於 $x = a^n$

5. $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

6. $x^{m/n} = (x^{1/n})^m = (\sqrt[n]{x})^m$

7. $x^{m/n} = (x^m)^{1/n} = \sqrt[n]{x^m}$

8. $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

(2) 運算:

1. $x^n x^m = x^{n+m}$

2. $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

3. $(xy)^n = x^n y^n$

4. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$

5. $(x^n)^m = x^{nm}$

6. 慣用法 (conventions):

   (a) $-x^n = -(x^n)$, 所以 $-x^n \neq (-x)^n$

   (b) $cx^n = c(x^n)$, 所以 $cx^n \neq (cx)^n$

   (c) $x^{n^m} = x^{(n^m)}$, 所以 $x^{n^m} \neq (x^n)^m$

註. 性質與運算均可用於化簡的動作.

六. 多項式的分解 (Factoring Polynomial)

代數基本定理 (Fundamental Theorem of Algebra): n 次多項式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

剛好有 n 個根 (可能包含重根與虛根). 故求多項式的根乃相當於分解多項式成一次因式 (linear factor).

例 3. 試分解 $2x^2 - 6x + 5$.

<解> 根據一元二次方程式的公式解, 此多項式的根為

$$\frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{4}$$

乃二虛根. 故

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 6x + 5 \\ = \ & 2\left(x - \frac{6-\sqrt{-4}}{4}\right)\left(x - \frac{6+\sqrt{-4}}{4}\right) \end{aligned}$$

例 4. 試求 $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 的定義域 (domain).

<解> 因爲含有二次方根, 故定義域相當於

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

經分解後, 得

$$(x-1)(x-2) \geq 0$$

又符號圖如下.

因此, 定義域爲

$$(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$$

七. 有理式 (Rational Expression)

有理式

$$r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(x)}{q(x)}$$

其中 $p(x)$ 與 $q(x)$ 爲二多項式, 亦即, 有理式爲二多項式的商. 有理式可分成如下的二類:

(1) 眞分式 (proper), 若分子 (numerator) 的次方小於分母 (denominator) 的次方, 如

$$\frac{x}{x^2+1}$$

(2) 假分式 (improper), 若分子的次方大於或等於分母的次方, 如

$$\frac{x^2}{x^2+1}$$

或

$$\frac{x^3-2x^2+1}{x+9}$$

八. 有理化 (Rationalization)

針對數學式中所含不同型式的根式, 有理化的原則如下述:

(1) $\sqrt{a}$: 乘以

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

如,

$$\frac{3}{\sqrt{12}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$: 乘以

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

並以平方差公式

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

化簡. 如,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

(3) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$: 乘以

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

並以平方差公式

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

化簡. 如,

$$\begin{aligned}&\frac{10}{\sqrt{x}+\sqrt{x+5}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{x}+\sqrt{x+5}} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+5}} \\ &= \frac{10(\sqrt{x}-\sqrt{x+5})}{-5} \\ &= -2(\sqrt{x}-\sqrt{x+5})\end{aligned}$$