單元 20: 商業與經濟的應用
(課本 §3.5)

例 1. 設銷售 x 件產品的收益

$$R = -x^3 + 450x^2 + 52500x$$

試求獲致最大收益的銷售量.

<解> 根據題意, 原問題乃相當於最大化

$$R = -x^3 + 450x^2 + 52500x, \ x > 0$$

故, (i) 求臨界數. 經由微分並分解, 得

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dx} &= -3x^2 + 900x + 52500 \\ &= -3(x^2 - 300x - 17500) \\ &= -3(x - 350)(x + 50) \end{aligned}$$

第一類臨界數: $\frac{dR}{dx} = 0$, 乃相當於

$$(x - 350)(x + 50) = 0$$

得

$$x = 350, \ -50 \text{ (不合, 因爲 } x > 0)$$

第二類臨界數: $\frac{dR}{dx}$ 未定義的 x 值, 無, 因爲 $\frac{dR}{dx}$ 爲一多項式, 恆定義.

(ii) 驗證. 根據上述求得的一個臨界數, 得二個子區間以及 $\frac{dR}{dx}$ 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(0, 350)$: $\frac{dR}{dx} = (-)(-)(+) = (+)$, 遞增.

$(350, \infty)$: $\frac{dR}{dx} = (-)(+)(+) = (-)$, 遞減.

故, 根據一階導數檢定法, 當 $x = 350$ 時, 有相對極大值. 又因爲只有一個臨界數, 此相對極大值亦爲一絕對最大值, 如所求.

因此, 當銷售量 x 爲 350 件時, 可得最大收益.

例 2. 設生產 x 件產品的總成本

$$C = 800 + 0.04x + 0.0002x^2$$

試求可獲致最低平均成本的生產量.

<解> 根據題意, 原問題乃相當於最小化<u>平均</u>成本

$$\begin{aligned}\overline{C} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{x} \\ &= \frac{800}{x} + 0.04 + 0.0002x, \quad x > 0\end{aligned}$$

故, (i) 求臨界數. 經由微分並化簡, 得

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{C}}{dx} &= -\frac{800}{x^2}+0.0002\\ &= \frac{2\times 10^{-4}x^2-800}{x^2}\end{aligned}$$

第一類臨界數: $\frac{d\overline{C}}{dx}=0$, 亦相當於分子

$$2\times 10^{-4}x^2-800=0$$

得

$$x^2=\frac{800}{2\times 10^{-4}}=400\times 10^4=4\times 10^6$$

由此導出

$$x=\pm\sqrt{4\times 10^6}=\pm 2\times 10^3=\pm 2000$$

但負不合, 因爲 $x>0$.

第二類臨界數: $\frac{d\overline{C}}{dx}$ 未定義的 x 值, 無, 因爲當 $x>0$ 時, $\frac{d\overline{C}}{dx}$ 恆定義.

(ii) 驗證. 根據上述求得的一個臨界數, 得二個子區間以及 $\frac{d\overline{C}}{dx}$ 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(0, 2000)$: $\frac{d\overline{C}}{dx} = (-)$, 遞減.

$(2000, \infty)$: $\frac{d\overline{C}}{dx} = (+)$, 遞增.

故, 根據一階導函數檢定法, 當 $x = 2000$ 時, 有相對極小值. 又因爲只有一個臨界數, 此相對極小值亦爲一絕對最小值, 如所求.

因此, 當產量 x 爲 2000 件時, 平均成本最低.

例 3. 設某產品的售價爲 10 元時, 每月可售出 2000 件. 若每降 0.25 元時, 可多售出 250 件, 如

$$p = 9.75,\ x = 2250$$

$$p = 9.50,\ x = 2500$$

$$\vdots$$

試求可獲致最大收益的售價 p.

<解> 根據題意, 原問題乃相當於最大化收益

$$R = xp$$

因爲要求最佳售價 p, 故需將 x 表成 p 並代入 R. 首先, 由已知, 得銷售量

$$\begin{aligned} x &= 2000 + \left(\frac{10-p}{0.25}\right)(250) \\ &= 2000 + (10-p)(1000) \\ &= 12000 - 1000p,\ 0 \le p \le 10 \end{aligned}$$

代入 R, 得原問題乃相當於最大化

$$\begin{aligned} R &= (12000 - 1000p)p \\ &= 12000p - 1000p^2,\ 0 \le p \le 10 \end{aligned}$$

故, (i) 求臨界數. 經由微分, 得

$$\frac{dR}{dp} = 12000 - 2000p$$

第一類臨界數: $\frac{dR}{dp} = 0$, 得

$$p = \frac{12000}{2000} = 6$$

第二類臨界數: $\frac{dR}{dp}$ 未定義的 p 值, 無, 因爲 $\frac{dR}{dp}$ 爲一多項式, 恆定義.

(ii) 驗證. 根據上述求得的一個臨界數, 得二個子區間以及 $\frac{dR}{dp}$ 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(0,6)$: $\frac{dR}{dp}=(+)$, 遞增.

$(6,10)$: $\frac{dR}{dp}=(-)$, 遞減.

所以, 根據一階導函數檢定法, 當 $x=6$ 時, 有相對極大值. 又因為只有一個臨界數, 此相對極大值亦為一絕對最大值, 如所求.

因此, 當售價 p 為 6 元時, 可獲得最大收益.

例 4. 設某產品的需求函數為

$$p=\frac{50}{\sqrt{x}}$$

且生產 x 件的總成本為

$$C=0.5x+500$$

試求可獲得最大利潤的售價.

<解> 根據題意, 需最大化利潤

$$P=R-C=xp-C$$

代入 p 與 C, 得最大化利潤

$$\begin{aligned} P &= x \cdot \frac{50}{\sqrt{x}} - (0.5x + 500) \\ &= 50\sqrt{x} - 0.5x - 500, \ x > 0 \end{aligned}$$

故, (i) 求臨界數. 經由微分及化簡, 得

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \frac{25}{\sqrt{x}} - 0.5 \\ &= \frac{25 - 0.5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

第一類臨界數: $\frac{dP}{dx} = 0$, 乃相當於分子

$$25 - 0.5\sqrt{x} = 0$$

得

$$\sqrt{x} = 50$$

亦即,

$$x = 50^2 = 2500$$

第二類臨界數: $\frac{dP}{dx}$ 未定義的 x 值, 無, 因爲當 $x > 0$ 時, $\frac{dP}{dx}$ 恆定義.

(ii) 驗證. 根據上述求得的一個臨界數, 得二個子區間以及 $\frac{dP}{dx}$ 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(0, 2500)$: $\frac{dP}{dx} = (+)$, 遞增.

$(2500, \infty)$: $\frac{dP}{dx} = (-)$, 遞減.

故, 根據一階導函數檢定法, 當 $x = 2500$ 時, 有相對極大值. 又因爲只有一個臨界數, 此相對極大值亦爲一絕對最大值, 如所求.

因此, 當銷售量爲 2500 件時, 可得最大利潤, 而此時的售價

$$p = \left.\frac{50}{\sqrt{x}}\right|_{x=2500} = \frac{50}{\sqrt{2500}} = 1$$

註. 根據上述的例題及事實, 得最大利潤的銷售量 x 乃

$$\frac{dP}{dx} = 0$$

的 x 值, 根據 $P = R - C$, 亦相當於

$$\frac{d}{dx}(R - C) = 0$$

的 x 值. 經由逐項微分, 上式亦相當於

$$\frac{dR}{dx} - \frac{dC}{dx} = 0$$

的 x 值, 亦即,

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dC}{dx}$$

的 x 值, 也就是, 邊際收益等於邊際成本的 x 值.

因此, 產生最大利潤的銷售量就是當邊際收益等於邊際成本時的銷售量, 符合實際的經驗.

需求的售價彈性 (price elasticity of demand)

一種指標可度量消費者對售價變化的反應程度.

直觀, 非正式的定義爲

(1) 需求爲有彈性的 (elastic): 當需求量有明顯的反應時, 如蔬菜的售價 $\downarrow$, 銷售量 $\uparrow$ (大).

(2) 需求爲無彈性的 (inelastic): 當需求量無明顯的反應時, 如牛奶與水的售價 $\downarrow$, 銷售量 $\uparrow$ (小).

(3) 反應大小的表示法: 以單位銷售量的變化率 $\frac{\Delta x}{x}$ 與單位售價的變化率 $\frac{\Delta p}{p}$ 的比值作爲售價改變對於銷售量反應的度量指標, 亦即, 以

$$\frac{\Delta x/x}{\Delta p/p}=\frac{p/x}{\Delta p/\Delta x}$$

作爲度量指標. 又根據導函數的定義,

$$\frac{dp}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta p}{\Delta x}$$

故

$$\frac{dp}{dx}\approx\frac{\Delta p}{\Delta x}$$

由此得度量指標

$$\frac{\Delta x/x}{\Delta p/p}=\frac{p/x}{\Delta p/\Delta x}\approx\frac{p/x}{dp/dx}\stackrel{\text{def}}{=}\eta$$

其中 η 讀作 eta, 可度量售價變化時, 消費者需求的反應程度, 如下述的正式定義.

正式, 嚴格的

定義. 令

$$p=f(x)$$

爲一需求函數. 需求的售價彈性 (price elasticity of demand)

$$\eta \overset{\text{def}}{=} \frac{p/x}{dp/dx}$$

且在一給定的售價 p 之下, 稱需求爲

$$\text{有彈性的 (elastic), 若 } |\eta| > 1$$

$$\text{無彈性性的 (inelastic), 若 } |\eta| < 1$$

$$\text{單位彈性 (unit elasticity), 若 } |\eta| = 1$$

註. 需求的售價彈性與總收益的關係, 如下述.

由總收益

$$R = xp$$

對 x 微分, 得

$$\frac{dR}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} \tag{1}$$

則

(1) 當

$$\frac{dR}{dx} > 0$$

亦即, 總收益 R 遞增時, 根據 (1) 式, 此乃相當於

$$x\frac{dp}{dx} > -p$$

因為 $x > 0$, 故亦相當於

$$\frac{dp}{dx} > -\frac{p}{x}$$

又因為當銷售量增加時, 售價下降, 亦即,

$$\frac{dp}{dx} < 0$$

故上式亦相當於

$$\left|\frac{dp}{dx}\right| < \left|-\frac{p}{x}\right| = \left|\frac{p}{x}\right|$$

如圖示.

故, 由上式, 得

$$|\eta| = \frac{|p/x|}{|dp/dx|} > 1$$

亦即, 需求為有彈性的.

因此, 需求為有彈性的乃相當於可經由降價而增加總收益, 亦即,

$$|\eta| > 1 \Leftrightarrow \frac{dR}{dx} > 0$$

(2) 當

$$\frac{dR}{dx} < 0$$

亦即, 總收益 R 遞減時, 根據 (1) 式, 此乃相當於

$$x\frac{dp}{dx} < -p$$

同理, 因爲 $x > 0$, 故亦相當於

$$\frac{dp}{dx} < -\frac{p}{x}$$

又因爲當銷售量增加時, 售價下降, 亦即,

$$\frac{dp}{dx} < 0$$

故上式亦相當於

$$\left|\frac{dp}{dx}\right| > \left|-\frac{p}{x}\right| = \left|\frac{p}{x}\right|$$

如圖示.

故, 由上式, 得

$$|\eta| = \frac{|p/x|}{|dp/dx|} < 1$$

亦即, 需求爲無彈性的.

因此, 需求爲無彈性的乃相當於無法經由降價而增加

總收益, 亦即,

$$|\eta| < 1 \Leftrightarrow \frac{dR}{dx} < 0$$

(3) 當

$$\frac{dR}{dx} = 0$$

亦即, 總收益 R 爲最大時, 根據 (1) 式, 此乃相當於

$$x\frac{dp}{dx} = -p$$

亦相當於

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p}{x}$$

故,

$$|\eta| = \frac{|p/x|}{|dp/dx|} = \frac{|p/x|}{|-p/x|} = 1$$

亦即, 需求爲單位彈性.

因此, 需求爲單位彈性乃相當於總收益爲最大時, 亦即,

$$|\eta| = 1 \Leftrightarrow \frac{dR}{dx} = 0$$

例 5. 設需求函數爲

$$p = \sqrt{450 - x},\ 0 < x < 450$$

(a) 試討論需求的售價彈性, 以及 (b) 根據 (a), 試說明總收益函數的行爲.

<解> (a) 首先, 根據廣義冪次規則, 將售價 p 對 x 微分, 得

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx} &= \frac{1}{2}(450 - x)^{-1/2}(-1) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{450 - x}}\end{aligned}$$

接著, 根據定義, 得需求的售價彈性

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{p/x}{dp/dx} = \frac{\frac{\sqrt{450-x}}{x}}{\frac{-1}{2\sqrt{450-x}}} \\ &= -\frac{2(450 - x)}{x} = -\frac{900}{x} + 2\end{aligned}$$

故, 當 $0 < x < 450$ 時, $\eta < 0$. 由此得

$$|\eta| = \frac{900}{x} - 2$$

因此,

(1) $|\eta| = 1$ 乃相當於

$$\frac{900}{x} - 2 = 1$$

得

$$x = 300$$

(2) $|\eta| > 1$ 乃相當於

$$\frac{900}{x} - 2 > 1$$

亦相當於

$$\frac{900}{x} > 3$$

故當 $x > 0$ 時, 得

$$0 < x < 300$$

(3) $|\eta| < 1$ 乃相當於

$$\frac{900}{x} - 2 < 1$$

亦即,

$$\frac{900}{x} < 3$$

故在 $0 < x < 450$ 的條件下, 得

$$300 < x < 450$$

因此, 根據定義, 需求爲

有彈性的, 當 $0 < x < 300$.

無彈性的, 當 $300 < x < 450$.

單位彈性, 當 $x = 300$.

(b) 根據需求的售價彈性與總收益的關係, 由 (a), 得

(i) 當 $0 < x < 300$ 時, 需求爲有彈性的, 故

$$\frac{dR}{dx} > 0$$

亦即, 總收益遞增, 如圖示.

(ii) 當 $x = 300$ 時, 需求爲單位彈性, 故

$$\frac{dR}{dx} = 0$$

亦即, 此時總收益為最大, 如圖示.

(iii) 當 $300 < x < 450$ 時, 需求為無彈性的, 故

$$\frac{dR}{dx} < 0$$

亦即, 總收益遞減, 如圖示.

註. 根據需求的售價彈性判斷總收益行為的優點是, 不需要先求出總收益函數, 再經由總收益的導函數來判斷, 而直接根據已知的需求的售價彈性即可.