單元 23: 微分式與邊際分析
(課本 §3.8)

一. 定義

令

$$y = f(x)$$

爲一函數, 則

(1) x 的變化量 (change in x)

$$\Delta x \overset{\text{def}}{=} \text{一非零實數}$$

(2) y 的變化量 (change in y)

$$\Delta y \overset{\text{def}}{=} f(x+\Delta x) - f(x)$$

設

$$y = f(x)$$

爲一可微函數, 亦即, $f'(x)$ 存在, 則

(1) x 的微分式 (differential of x)

$$dx \stackrel{\text{def}}{=} \Delta x = \text{一非零實數}$$

(2) y 的微分式 (differential of y)

$$dy \stackrel{\text{def}}{=} f'(x)dx$$

亦即, y 的微分式

$$dy = (f \text{ 的導函數}) \cdot (x \text{ 的變化量})$$

二. 微分式 dy 的解釋與應用

根據圖示, 得知

(1) 過點 $(x, f(x))$ 的

$$\text{切線斜率} \cdot x \text{ 的微分式} = f'(x)dx = dy$$

亦即, y 的微分式剛好就是 "切線斜率乘上 x 的微分式", 此乃微分式的解釋.

(2) 當 x 的變化量 $\Delta x \to 0$ 時, $y = f(x)$ 的圖形與切線愈接近, 由此乃暗示

$$\Delta y \approx dy$$

亦即, 當 x 的變化量 Δx 夠小時, 所對應的 y 的真正變化量 Δy 可用 y 的微分式 dy 近似, 稱作切線近似 (tangent approximation, 又稱作線性近似), 此乃微分式的應用.

爲何如此? (i) 直觀上, 可由上述的圖示觀察而得.

(ii) 根據導函數以及上述變化量的定義,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \end{aligned}$$

由此導出, 當 Δx 夠小時,

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

將上式兩邊同乘 Δx, 得

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

再根據微分式的定義, 亦相當於

$$\Delta y \approx f'(x)dx = dy$$

如所求.

例 1. 設函數

$$f(x) = x^2$$

(a) 試求當 $x = 1$ 且 $\Delta x = 0.01$ 時的 dy.

(b) 試比較 (a) 中的 dy 與當 $x = 1$ 且 $\Delta x = 0.01$ 時的 Δy.

<解> (a) 根據定義, y 的微分式

$$dy = f'(x)dx = 2xdx$$

代入 $x = 1$ 以及 $dx = \Delta x = 0.01$, 得

$$dy = 2(1)(0.01) = 0.02$$

(b) 根據 y 變化量的定義, 在 $x = 1$ 且 $\Delta x = 0.01$ 時, y 的眞正變化量

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(1 + 0.01) - f(1) \\ &= (1 + 0.01)^2 - 1^2 \\ &= (2.01)(0.01) = 0.0201\end{aligned}$$

因此,

$$\Delta y = 0.0201 \approx dy = 0.02$$

一個相當好的估計.

三. 經濟上的意義

設

$$R = f(x)$$

爲一收益 (revenue) 函數. 則收益變化量 (change in revenue)

$$\begin{aligned}\Delta R &= f(x+\Delta x) - f(x)\\ &\approx dR = \frac{dR}{dx}\cdot dx\end{aligned}$$

故當 $\Delta x = dx = 1$, 亦即, 銷售量或產量增加 1 個單位時, 收益變化量

$$\Delta R \approx dR = \frac{dR}{dx}$$

並稱 $\frac{dR}{dx}$ 爲邊際收益 (marginal revenue).

同理, 當 $\Delta x = dx = 1$, 亦即, 銷售量或產量增加 1 個單位時, 成本變化量

$$\Delta C \approx dC = \frac{dC}{dx}$$

並稱 $\frac{dC}{dx}$ 爲邊際成本 (marginal cost), 以及利潤變化量

$$\Delta P \approx dP = \frac{dP}{dx}$$

並稱 $\frac{dP}{dx}$ 爲邊際利潤 (marginal profit).

例 2. 設需求函數

$$p = \sqrt{400 - x}, \ 0 \le x \le 400$$

試以微分式估計當銷售量由 256 件增至 257 件時的收益變化量, 並與眞正的收益變化量比較.

<解> 首先, 收益

$$R = xp = x\sqrt{400 - x}, \ 0 \le x \le 400$$

接著, 根據乘法規則以及廣義冪次規則, 將上式對 x 微分並化簡, 得

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dx} &= 1 \cdot \sqrt{400 - x} + x \cdot \frac{1}{2}(400 - x)^{-1/2}(-1) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{400 - x}}[2(400 - x) - x] \\ &= \frac{800 - 3x}{2\sqrt{400 - x}} \end{aligned}$$

當 $x = 256$ 且

$$dx = \Delta x = 257 - 256 = 1$$

時, 收益微分式

$$dR = \frac{dR}{dx} \cdot dx = \frac{800 - 3(256)}{2\sqrt{400 - 256}}(1) \approx 1.33$$

而眞正的收益變化量

$$\begin{aligned}\Delta R &= R(257) - R(256) \\ &= 257\sqrt{400-257} - 256\sqrt{400-256} \\ &\approx 1.27\end{aligned}$$

故,

$$\Delta R \approx dR$$

一個不錯的估計.

四. 微分規則的微分式型式

設 u 與 v 爲 x 的可微函數, 且 c 爲一常數.

(1) 常數乘法規則:

$$d[cu] = cdu$$

因爲根據微分式的定義,

$$\begin{aligned}d[cu] &= \frac{d}{dx}(cu)\cdot dx \\ &= c\left(\frac{du}{dx}\right)\cdot dx \\ &= cdu\end{aligned}$$

得證.

(2) 加減規則:

$$d[u \pm v] = du \pm dv$$

(3) 乘法規則:

$$d[uv] = udv + vdu$$

因爲根據微分式的定義,

$$\begin{aligned} d[uv] &= \frac{d}{dx}(uv) \cdot dx \\ &= \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) dx \\ &= u\left(\frac{dv}{dx}\right) dx + v\left(\frac{du}{dx}\right) dx \\ &= udv + vdu \end{aligned}$$

如所求.

(4) 除法規則:

$$d\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

(5) 常數規則:

$$d[c] = 0$$

(6) 冪次規則:

$$d[x^n] = nx^{n-1}dx$$

因爲根據微分式的定義,

$$d[x^n] = \frac{d}{dx}(x^n) \cdot dx = nx^{n-1}dx$$

得證.