# 單元 24: 指數函數
## (課本 §4.1)

一. 定義

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 則以 $a$ 為底數的指數函數

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} a^x$$

二. 性質

指數函數有下述的指數律,

(1) $a^0 = 1$

(2) $a^x a^y = a^{x+y}$

(3) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(4) $(a^x)^y = a^{xy}$

(5) $(ab)^x = a^x b^x$

(6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

(7) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

三. 圖形

(i) 當底數 $a > 1$ 時, 指數函數 $y = a^x$ 的圖形如下, 得

(1) 定義域爲 $(-\infty, \infty)$.

(2) 值域爲 $(0, \infty)$, 且過點 $(0, 1)$.

(3) 遞增, 上凹.

(4) 連續.

(5) 一對一, 故有反函數.

(6) 當 $x$ 向右無界地延伸時,

$$\lim_{x\to\infty} a^x = a^{\infty} = \infty$$

(7) 當 $x$ 向左無界地延伸時,

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = 0$$

得 $y = 0$ 爲一水平漸近線.

(ii) 指數函數

$$y = a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x,\ a > 1$$

亦相當於

$$y = b^x,\ 0 < b < 1$$

亦即, 底數小於 1 的正數的指數函數, 其圖形如下, 得

(1) 定義域爲 $(-\infty, \infty)$.

(2) 值域爲 $(0, \infty)$, 且過點 $(0, 1)$.

(3) 遞減, 上凹.

(4) 連續.

(5) 一對一, 故有反函數.

(6) 當 $x$ 向右無界地延伸時,

$$\lim_{x\to\infty} a^{-x} = a^{-\infty} = 0,\ a > 1$$

亦相當於

$$\lim_{x\to\infty} b^{x} = b^{\infty} = 0,\ 0 < b < 1$$

得 $y = 0$ 爲一水平漸近線.

(7) 當 $x$ 向左無界地延伸時,

$$\lim_{x\to-\infty} a^{-x} = a^{-(-\infty)} = a^{\infty} = \infty,\ a > 1$$

亦相當於

$$\lim_{x\to-\infty} b^{x} = b^{-\infty} = \infty,\ 0 < b < 1$$

例 1. 試求下列各方程式的解.

(a) $3^x = 81$

(**b**) $5^{x+1} = 125$

(**c**) $(x+3)^{4/3} = 16$

<解> (a) 因爲

$$3^x = 81 = 3^4$$

故根據指數函數的一對一性質, 得

$$x = 4$$

(b) 因爲

$$5^{x+1} = 125 = 5^3$$

故根據指數函數的一對一性質, 得

$$x + 1 = 3$$

因此,

$$x = 2$$

(c) 由

$$(x+3)^{4/3} = 16 = 2^4$$

以及指數律

$$(x+3)^{4/3} = \left((x+3)^{1/3}\right)^4 = \left(\sqrt[3]{x+3}\right)^4$$

得

$$\sqrt[3]{x+3} = \pm 2$$

再將上式的兩邊三次方，得

$$(x+3) = (\pm 2)^3 = \pm 8$$

因此，

$$x = \pm 8 - 3 = -11 \text{ 或 } 5$$

四．應用

考古學上，追溯有機物質存在的時間 (dating organic material).

在活的有機物中，放射性碳同位素 (radioactive carbon isotopes) 與全部的碳原子 (carbon atoms) 的比率

$$R = \frac{1}{10^{12}}$$

有機物死後, 放射性碳同位素開始以半生期 (half-life, 或稱作半衰期) 爲 5700 年的速度退化, 亦即, 每經過 5700 年, 放射性碳同位素的數量減半, 例如經過死亡後的第一個 5700 年, 比率

$$R = \frac{1}{10^{12}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

經過第二個 5700 年, 得比率

$$R = \frac{1}{10^{12}}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10^{12}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

經過第三個 5700 年, 得比率

$$R = \frac{1}{10^{12}}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10^{12}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\vdots$$

因此, 得比率模型 (ratio model)

$$R = \frac{1}{10^{12}}\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5700}, \ t \geq 0$$

如圖示.

若現在量得一恐龍骨頭中的比率

$$R \approx 2.964 \times 10^{-13}$$

問恐龍大概在多少年前生存在地球上?

<解> 因爲當恐龍死亡後的年數 $t = 10000$ 時, 根據上述的比率模型, 其骨中的比率

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{10^{12}}\left(\frac{1}{2}\right)^{10000/5700} \\ &\approx 2.964 \times 10^{-13} \end{aligned}$$

就是現在量得的比率, 故恐龍大概在 10000 年前死亡.

**註.** 介紹對數函數後, 可實際地解 $t$.