單元 27: 對數函數
(課本 §4.4)

一. 自然對數函數的定義

根據自然指數函數 e^x 圖形及水平線檢定法, 得 e^x 爲一對一函數, 故 e^x 有反函數, 並稱此反函數爲自然對數函數 (natural logarithm function), 且表示成

$$\ln x$$

亦即,

$$\ln x = b \Leftrightarrow e^b = x$$

如圖示.

二. 自然對數函數的圖形

根據反函數圖形的性質, 由 e^x 的圖形, 經由對直線

$$y = x$$

的鏡射, 得自然對數 $\ln x$ 的圖形, 如圖示, 以及

(1) 定義域爲 $(0, \infty)$.

(2) 值域爲 $(-\infty, \infty)$, 且過點 $(1, 0)$.

(3) 遞增, 下凹.

(4) 連續.

(5) 一對一, 故有反函數 e^x.

(6) 當 x 向右無界地延伸時,

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \ln\infty = \infty$$

故, 無水平漸近線.

(7) 當 x 由右靠近 0 時,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \ln 0^+ = -\infty$$

得 $x = 0$ 爲一垂直漸進線.

三. 性質

因爲 e^x 與 $\ln x$ 互爲反函數, 故

(1) 對於 $-\infty < x < \infty$,

$$\ln e^x = x$$

(2) 對於 $x > 0$,

$$e^{\ln x} = x$$

以及如下的對數律

(1) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

(2) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

(3) $\ln x^n = n \ln x$

註. 只有在乘積, 分式, 以及次方後的對數才有對數律, 其它的情況均無, 如

$$\begin{aligned} \ln(x+y) &\neq \ln x + \ln y \\ &\neq \ln x \ln y \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \ln(x-y) &\neq \ln x - \ln y \\ &\neq \frac{\ln x}{\ln y} \end{aligned}$$

對數律在化簡上相當有用，請特別注意，記住正確的對數律，勿犯上述的錯誤.

例 1. 試解下列各方程式.

(a) $e^x = 5$

(b) $10 + 3e^{0.1t} = 14$

(c) $\ln x = 5$

(d) $3 + 2\ln x^2 = 7$

<解> (a) 因爲欲求解的 x 在指數函數內，故將原式兩邊同取 ln，得

$$\ln e^x = \ln 5$$

再根據 e^x 與 $\ln x$ 互為反函數, 得

$$x = \ln 5$$

(b) 將 10 移至等號右邊並同除 3, 得

$$e^{0.1t} = \frac{1}{3}(14 - 10) = \frac{4}{3}$$

同理, 因為欲求解的 t 在指數函數內, 故將上式兩邊同取 ln, 得

$$\ln e^{0.1t} = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

再根據 e^x 與 $\ln x$ 互為反函數, 由上式得

$$0.1t = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

故,

$$t = \frac{1}{0.1}\ln\left(\frac{4}{3}\right) = 10\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

(c) 因為欲求解的 x 在對數函數內, 故將原式兩邊同取 e, 得

$$e^{\ln x} = e^5$$

接著, 根據 $\ln x$ 與 e^x 互為反函數, 由上式得

$$x = e^5$$

(d) 將 3 移至等號右邊並同除 2, 得

$$\ln x^2 = \frac{1}{2}(7-3) = 2$$

因為欲求解的 x 在對數函數內, 故將上式兩邊同取 e, 得

$$e^{\ln x^2} = e^2$$

再根據 $\ln x$ 與 e^x 互為反函數, 由上式得

$$x^2 = e^2$$

故,

$$x = \pm e$$

例 2. 設本金為 P, 年利率為 r, 且以連續複利計算. 試問經過幾年後, 結餘為本金的二倍?

<解> 首先, 根據連續複利的公式, t 年後的結餘

$$A = Pe^{rt}$$

故原問題乃相當於求 t 使得

$$Pe^{rt} = 2P$$

同除 P, 亦相當於

$$e^{rt} = 2$$

兩邊同取 ln, 得

$$\ln e^{rt} = \ln 2$$

再根據 e^x 與 $\ln x$ 互為反函數, 由上式得

$$rt = \ln 2$$

故,

$$t = \frac{1}{r}\ln 2$$

與年利率成反比且比率常數為 $\ln 2$, 與經驗相符, 如

r	3%	8%
t	$\frac{1}{0.03}\ln 2 = 23.1$	$\frac{1}{0.08}\ln 2 = 8.7$
r	10%	
t	$\frac{1}{0.1}\ln 2 = 6.9$	