單元 29: 指數成長與退化
(課本 §4.6)

指數成長與退化模型 (exponential growth and decay model)

設某物質的數量 y 爲一時間 t 的函數, 且在任一時間 t, 其變化率

$$\frac{dy}{dt}$$

與當時的數量 y 成正比, 亦即,

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{1}$$

其中 k 爲一比例常數, 則 y 的型式爲

$$y = Ce^{kt}$$

其中 C 爲初值, k 爲比例常數.

註. 通常 C 與 k 均爲未知, 待求的常數.

若 $k > 0$, 則稱此模型爲指數成長.

若 $k < 0$, 則稱此模型爲指數退化.

爲何如此? 根據指數函數的導函數公式, 將

$$y = Ce^{kt}$$

的兩邊對時間 t 微分, 得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= Ce^{kt} \cdot (kt)' \\ &= Ce^{kt} \cdot k \\ &= k(Ce^{kt}) = ky\end{aligned}$$

(1) 式成立. 故,

$$y = Ce^{kt}$$

爲 (1) 式的解.

當 $t = 0$ 時, 得

$$y = Ce^{k(0)} = C \cdot e^0 = C \cdot 1 = C$$

亦即, C 爲 $t = 0$ 時的 y 值, 故稱爲初值.

若 $k > 0$, 由指數函數的圖形知,

$$y = Ce^{kt} \uparrow$$

故稱爲指數成長.

若 $k < 0$, 由指數函數的圖形知,

$$y = Ce^{kt} \downarrow$$

故稱為指數退化.

例 1. 設放射性物質鐳 (radium, Ra^{226}) 的半生期為 1620 年, 且滿足指數退化的現象. 試問一克的鐳, 經過 1000 年後, 還剩多少?

<解> 令 y 為 t 年後鐳的重量, 則根據假設,

$$y = Ce^{kt}$$

其中 C 與 k (小於 0, 因為退化) 均為未知常數.

接著, 由題意, 得已知條件為

$$t = 0,\ y = 1 \tag{2}$$

以及

$$t = 1620,\ y = \frac{1}{2} \tag{3}$$

並以此二條件解二未知數 C 與 k, 如下述.

解 C 與 k. 首先, 由 (2) 式, 得

$$C = \text{初值} = 1$$

故

$$y = e^{kt}$$

接著, 將 (3) 式代入, 得

$$\frac{1}{2} = e^{k(1620)}$$

兩邊取 ln 後, 得

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{k(1620)} = k(1620)$$

因此,

$$k = \frac{1}{1620}\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

為指數退化, 如所求.

最後, 將 k 代入, 並根據指數律以及 e^x 與 $\ln x$ 互為反函數的性質化簡, 得

$$\begin{aligned} y &= e^{\left[\frac{1}{1620}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]t} = e^{\frac{t}{1620}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \left[e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right]^{t/1620} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/1620} \end{aligned}$$

此式明顯地顯示出半生期的含意.

因此, 當 $t = 1000$ 時, 剩餘的重量為

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1000/1620} \approx 0.652 \text{ 克}$$

例 2. 設果蠅的數量符合指數成長. 若 2 天後, 有 100 隻果蠅; 4 天後, 有 300 隻果蠅, 試問 5 天後, 有幾隻果蠅?

<解> 設 y 爲 t 天後的果蠅數. 由假設知,

$$y = Ce^{kt}$$

其中 C 與 k (大於 0, 因爲成長) 爲未知常數.

由題意, 得已知條件爲

$$t = 2,\ y = 100 \tag{4}$$

以及

$$t = 4,\ y = 300 \tag{5}$$

解 C 與 k. 由 (4) 式, 得

$$100 = Ce^{2k} \tag{6}$$

同理, 由 (5) 式, 得

$$300 = Ce^{4k} \tag{7}$$

接著, 將 (7) 式除以 (6) 式, 得

$$3 = \frac{Ce^{4k}}{Ce^{2k}} = e^{2k}$$

兩邊同取 ln, 得

$$\ln 3 = \ln e^{2k} = 2k$$

故,

$$k = \frac{1}{2}\ln 3 > 0$$

爲指數成長, 如所求.

另將 $e^{2k} = 3$ 代入 (6) 式, 得

$$100 = 3 \cdot C$$

故,

$$C = \frac{100}{3}$$

因此, 代入 k 與 C 並化簡, 得

$$\begin{aligned} y &= \frac{100}{3} e^{\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)t} = \frac{100}{3} e^{\left(\frac{t}{2}\right)\ln 3} \\ &= \frac{100}{3}\left(e^{\ln 3}\right)^{t/2} = \frac{100}{3} 3^{t/2} \end{aligned}$$

當 $t = 5$ 時, 果蠅的數量爲

$$\begin{aligned} y &= \frac{100}{3} 3^{5/2} = \frac{100}{3} \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3} \\ &= 300\sqrt{3} \approx 514 \text{ 隻} \end{aligned}$$

例 3. 若連續 4 個月未打電視廣告, 則銷售量會由 100,000 件降至 80,000 件. 若銷售量下滑是符合指數模型, 試問再 4 個月不打廣告的後果爲何?

<解> 令 y 爲連續 t 月不打廣告的的銷售量. 由假設知,

$$y = Ce^{kt}$$

其中 C 與 k (小於 0, 因爲下滑, 衰退) 爲未知常數.

由題意, 得已知條件爲

$$t = 0, \ y = 100,000 \tag{8}$$

以及

$$t = 4, \ y = 80,000 \tag{9}$$

解 C 與 k. 由 (8) 式, 得

$$C = \text{初值} = 100,000$$

因此,

$$y = 100,000e^{kt}$$

將 (9) 式代入, 得

$$80,000 = 100,000e^{4k}$$

接著, 將兩邊同除 100,000, 得

$$e^{4k} = \frac{80,000}{100,000} = \frac{4}{5}$$

再將兩邊同取 ln, 得

$$4k = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

故,

$$k = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4}{5}\right) < 0$$

爲指數退化, 如所求.

最後, 將 k 代入並化簡, 得

$$y = 100,000e^{\frac{1}{4}\ln\left(\frac{4}{5}\right)t} = 100,000\left(\frac{4}{5}\right)^{t/4}$$

又再 4 個月相當於 $t = 8$, 故銷售量

$$\begin{aligned} y &= 100,000e^{\frac{1}{4}\ln\left(\frac{4}{5}\right)8} = 100,000e^{2\ln\left(\frac{4}{5}\right)} \\ &= 100,000\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{100,000}{25}\cdot 16 \\ &= 4,000\cdot 16 = 64,000 \text{ 件} \end{aligned}$$