

單元 31: 廣義冪次規則

(課本 §5.2)

複習. 簡單冪次規則為, 對於 $n \neq -1$,

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

問. 不定積分

$$\int 2x(x^2 + 1)^3 dx$$

為何?

答. 因為被積函數含有 $(x^2 + 1)$ 的 3 次方項, 根據不定積分或反導函數的定義, 不定積分應含有 $(x^2 + 1)$ 的 4 次方項, 故根據微分的廣義冪次規則, 先考慮

$$\frac{d}{dx} [(x^2 + 1)^4] = 4(x^2 + 1)^3 (2x)$$

接著, 將上式兩邊同除以 4, 得

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{4} (x^2 + 1)^4 \right] = 2x(x^2 + 1)^3$$

剛好就是被積函數.

因此, 由不定積分的定義,

$$\int 2x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + C$$

另類觀點: 根據上述的推導, 關鍵點乃在於 $(x^2 + 1)$ 這一項的次方, 由 3 經由反微分的過程增為 4, 故令

$$u = x^2 + 1$$

得

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

並代入原不定積分, 整理, 且根據微分式

$$du = \frac{du}{dx} dx$$

以及積分的簡單冪次規則, 得

$$\begin{aligned} \int 2x(x^2 + 1)^3 dx &= \int (x^2 + 1)^3 (2x) dx \\ &= \int u^3 \frac{du}{dx} dx \\ &= \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C \\ &= \frac{1}{4} (x^2 + 1)^4 + C \end{aligned}$$

其中最後一個等式乃將 u 反代為 $(x^2 + 1)$, 表成 x 的式子.

根據上述的代入以及微分式的引用, 可推廣出下述的廣義冪次規則.

廣義冪次規則.

設 u 為 x 的可微函數, 則對於 $n \neq -1$,

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$$

問. 如何使用廣義冪次規則?

答. (i) 型式辨識 (pattern recognition).

重點乃在於辨識出被積函數中的一部分為 u , 其餘的部分為 $\frac{du}{dx}$ 的常數倍數, 再根據廣義冪次規則, 得出不定積分. 通常將被積函數中合成函數的內部函數視為 u , 再設法將其餘的部分表成 $\frac{du}{dx}$ 的某一倍數, 以例說明如下.

例 1. 試求下列各項不定積分.

(a) $\int 3x^2 \sqrt{x^3 - 2} dx$

$$(b) \int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2} dx$$

$$(c) \int (2x+1)(x^2+x) dx$$

$$(d) \int x(3-4x^2)^2 dx$$

$$(e) \int 2(x^2+1)^2 dx$$

<解> (a) 因為被積函數中的合成函數部分為

$$\sqrt{x^3-2}$$

故根據上述型式辨識的原則, 視 (x^3-2) 為 u , 並將被積函數的合成函數部分表成

$$(\text{函數})^n$$

的型式, 再由廣義冪次規則, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \underbrace{(x^3-2)^{1/2}}_{u^{1/2}} \underbrace{(3x^2)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \frac{2}{3}(x^3-2)^{3/2} + C \end{aligned}$$

(b) 首先, 可辨識出合成函數的部分為

$$(1 - 2x^2)^{-2}$$

故根據型式辨識的原則, 視 $(1 - 2x^2)$ 為 u , 並經由適當的改寫, 以及廣義冪次規則, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \underbrace{(1 - 2x^2)^{-2}}_{u^{-2}} \underbrace{(-4x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= -(1 - 2x^2)^{-1} + C \end{aligned}$$

(c) 雖然被積函數中沒有明顯的合成函數部分, 但兩項的乘積中, $(2x + 1)$ 項為 $(x^2 + x)$ 項的導函數, 故可視 $(x^2 + x)$ 為 u , 並經由適當的改寫, 以及廣義冪次規則, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \underbrace{(x^2 + x)}_u \underbrace{(2x + 1)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + x)^2 + C \end{aligned}$$

(d) 由題目可辨識出被積函數中合成函數的部分為

$$(3 - 4x^2)^2$$

故根據型式辨識的原則, 視 $(3 - 4x^2)$ 為 u , 並得

$$\frac{du}{dx} = -8x$$

但卻不是被積函數中其餘的部分 x ，而差一個 (-8) 的常數倍數，故可經由乘以一個 (-8) ，再除以一個 (-8) 的適當改寫，形成 $\frac{du}{dx}$ ，再根據積分的常數乘法規則以及廣義冪次規則，得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \left(-\frac{1}{8}\right) \underbrace{(3-4x^2)^2}_{u^2} \underbrace{(-8x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} (3-4x^2)^3 + C \\ &= -\frac{1}{24} (3-4x^2)^3 + C \end{aligned}$$

(e) 先做一個錯誤的示範，因為合成函數的部分為

$$(x^2 + 1)^2$$

故一個與前述各項解題經驗一致的作法為，視 $(x^2 + 1)$ 為 u ，並同乘除一個 x ，形成 $\frac{du}{dx}$ 後，得

$$\text{原式} = \int \frac{1}{x} \underbrace{(x^2 + 1)^2}_{u^2} \underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} dx$$

因為上式經由辨識及改寫後的被積函數內有一含 x 的項，不符合廣義冪次規則

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$$

中被積函數型式的要求, 只可含 u^n 項, $\frac{du}{dx}$ 項, 以及 dx 項, 故廣義冪次規則不適用, 而應改用其他的方法, 切勿將含有 x 的項提出積分符號外, 錯誤地使用廣義冪次規則, 如

$$\begin{aligned}\text{原式} &\neq \frac{1}{x} \int \underbrace{(x^2 + 1)^2}_{u^2} \underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &\neq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3} (x^2 + 1)^3 + C\end{aligned}$$

再次地提醒, 根據積分的常數乘法規則, 只可將乘積中的常數提出積分符號外, 絕對不可將含 x 的項提出來, 如上述的錯誤示範. 另外, 經辨識改寫後, 只有在被積函數中不含 x 項, 亦即, 符合廣義冪次規則中被積函數型式的要求下, 才可使用廣義冪次規則, 切勿任意地誤用, 如上述的錯誤示範, 而應改用其他的正確方法, 如下述.

因為被積函數內有一個平方項, 次方不大, 故可將被積函數展開, 形成一個多項式, 再根據簡單冪次規則逐項積分, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int (2x^4 + 4x^2 + 2) dx \\ &= \frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + 2x + C\end{aligned}$$

(ii) 代入法 (substitution) 或變數變換 (change of variable).

重點乃在於將原被積函數的 x 與 dx , 經由適當的代入及微分式的引用, 而轉換成 u 與 du 後, 再根據簡單冪次規則積分, 如令

$$u = f(x)$$

得微分式

$$du = f'(x)dx$$

並代入, 再根據簡單冪次規則, 對於 $n \neq -1$, 得

$$\begin{aligned} \int \underbrace{[f(x)]^n}_{u^n} \underbrace{f'(x)dx}_{du} &= \int u^n du \\ &= \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \\ &= \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + C \end{aligned}$$

其中最後一個等號乃是反代入, 將積分的結果表成 x 的數學式, 符合原題意的要求, 找一個以 x 為自變數的函數.

如同型式辨識法, 通常取被積函數中合成函數部分的內部函數為 u , 並將其餘的部分表成微分式 du 的常數倍數, 在完全改寫成 u 與 du 的型式, 不可含有任何 x 的式子後, 才可根據簡單冪次規則求積分, 說明如下.

例 2. 試求下列各項不定積分.

$$(a) \int \sqrt{1-3x} dx$$

$$(b) \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+4}} dx$$

$$(c) \int x^2(1-x^3)^{51} dx$$

<解> (a) 因為被積函數中的合成函數為

$$\sqrt{1-3x}$$

故令

$$u = 1 - 3x$$

得微分式

$$du = (1-3x)' dx = -3dx$$

由此得其餘的部分

$$dx = -\frac{1}{3} du$$

將 u 與 dx 代入, 得

$$\text{原式} = \int u^{1/2} \left(-\frac{1}{3}\right) du$$

因爲已將原式換成只含 u 與 du 的型式, 不含任何 x 的式子, 故根據積分的常數乘法規則, 以及簡單冪次規則, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= -\frac{1}{3} \int u^{1/2} du \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= -\frac{2}{9} (1 - 3x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

除了上述以 dx 代入的方式外, 也可採用類似型式辨識的方法, 適當地調整常數乘積, 將其餘的部分表成 du 的常數倍, 如乘以一個 (-3) , 再除以一個 (-3) , 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \left(-\frac{1}{3}\right) (1 - 3x)^{1/2} (-3) dx \\ &= -\frac{1}{3} \int u^{1/2} du \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= -\frac{2}{9} (1 - 3x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

自行選擇一個適合自己的方式即可, 不做方法上的強制.

(b) 明顯地, 被積函數中的合成函數爲

$$(x^3 + 3x + 4)^{-1/2}$$

故令

$$u = x^3 + 3x + 4$$

得

$$\begin{aligned} du &= (x^3 + 3x + 4)' dx \\ &= (3x^2 + 3) dx \\ &= 3(x^2 + 1) dx \end{aligned}$$

兩邊同除 3, 得其餘的部分

$$(x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} du$$

代入, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int (x^3 + 3x + 4)^{-1/2} (x^2 + 1) dx \\ &= \int u^{-1/2} \left(\frac{1}{3}\right) du \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2u^{1/2} + C \\ &= \frac{2}{3} (x^3 + 3x + 4)^{1/2} + C \end{aligned}$$

(c) 由題目可觀察出被積函數中的合成函數為

$$(1 - x^3)^{51}$$

故令

$$u = 1 - x^3$$

得

$$du = -3x^2 dx$$

兩邊同除 -3 , 得其餘的部分

$$x^2 dx = -\frac{1}{3} du$$

將 u 與上式代入, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int (1 - x^3)^{51} x^2 dx \\ &= \int u^{51} \left(-\frac{1}{3}\right) du \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{52} u^{52} + C \\ &= -\frac{1}{156} (1 - x^3)^{52} + C \end{aligned}$$