

單元 34: 由二圖形所圍出區域的面積 (課本 §5.5)

一. 二函數圖形所圍出區域的面積

令函數 f 與 g 在 $[a, b]$ 上連續, 且對所有的 $x \in [a, b]$,

$$f(x) \geq g(x)$$

則在 $[a, b]$ 上由 f 與 g 所圍成的區域

$$R \text{ 的面積} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

亦即,

$$R \text{ 的面積} = \int_a^b [\text{上函數} - \text{下函數}] dx \quad (1)$$

如圖示.

爲何如此? 考慮特例. 設在 $[a, b]$ 上, f 與 g 均大於或等於 0, 且圖形如下, 則根據圖示, 非負函數定積分的面積觀點, 以及積分的加減規則,

$$\begin{aligned} R \text{ 的面積} &= \text{由 } f \text{ 所圍出的區域面積} - \\ &\quad \text{由 } g \text{ 所圍出的區域面積} \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \end{aligned}$$

如所求. 其它情況, 亦成立 (略).

例 1. 令 R 為

$$y = x^2 + 2$$

與

$$y = x$$

在 $[0, 1]$ 上所圍成的區域. 試求 R 的面積.

<解> (i) 繪圖求上, 下函數. 如圖示, 得

$$\text{上函數: } y = x^2 + 2$$

且

$$\text{下函數: } y = x$$

(ii) 根據 (1) 式, 所圍出區域

$$\begin{aligned} R \text{ 的面積} &= \int_0^1 [(x^2 + 2) - x] dx \\ &= \left. \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{2}x^2 \right|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} \right) - 0 \\ &= \frac{11}{6} \end{aligned}$$

例 2. 試求由

$$y = 2 - x^2$$

與

$$y = x$$

所圍出區域的面積.

<解> 與上例最大的不同乃是, 未明確地給出所圍出區域的 x 範圍, 亦即, 定積分的上下界 a 與 b , 故需先由二圖形的交點求出積分的上下界, 再確定上下函數, 並根據所圍出區域面積的積分公式求面積, 如下述.

(i) 求交點決定積分的上下界. 令兩函數的 y 值相等, 亦即

$$2 - x^2 = x$$

並解 x . 移項整理, 得

$$x^2 + x - 2 = 0$$

經由因式分解, 得

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

故

$$x = -2, 1$$

(ii) 決定上下函數. (a) 繪圖: 根據上述求得兩交點的 x 坐標, 以及一為開口向下的拋物線, 另一為直線, 得圖形如下, 故

$$\text{上函數: } y = 2 - x^2$$

且

$$\text{下函數: } y = x$$

或 (b) 比較法: 選 (i) 中求得的積分範圍 $[-2, 1]$ 內的任一點, 代入二函數求值, 並比較它們的大小, 大的為上函數, 小的為下函數. 例如, 選 $x = 0$ 代入, 得

$$y = 2 - x^2 \Big|_{x=0} = 2$$

以及

$$y = x \Big|_{x=0} = 0$$

故

$$\text{上函數: } y = 2 - x^2$$

且

$$\text{下函數: } y = x$$

(iii) 根據 (i) 與 (ii), 以及所圍出區域的面積公式,

$$R \text{ 的面積} = \int_{-2}^1 [(2 - x^2) - x] dx$$

最後，根據微積分基本定理，由上式得

$$\begin{aligned} R \text{ 的面積} &= 2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-2}^1 \\ &= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) \\ &= 8 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

例 3. 令 R 為

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$$

與

$$g(x) = -x^2 + 2x$$

所圍出的區域。試求 R 的面積。

<解> 同上例，(i) 求交點決定積分的上下界。令

$$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$$

並解 x 。經移項整理並因式分解，得

$$3x^3 - 12x = 0$$

以及

$$3x(x^2 - 4) = 0$$

故

$$x = 0, -2, 2$$

(ii) 決定上下函數. (a) 繪圖: 根據 (i) 中所求得的三個交點, 一為三次多項式所表現出的由負無窮大到正無窮大的曲線, 另一為開口向下的拋物線, 得圖形如下, 故在 $[-2, 0]$ 上,

$$\text{上函數: } f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$$

且

$$\text{下函數: } g(x) = -x^2 + 2x$$

但在 $[0, 2]$ 上,

$$\text{上函數: } g(x) = -x^2 + 2x$$

且

$$\text{下函數: } f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$$

或 (b) 代入比較法: 在 $[-2, 0]$ 內, 選 $x = -1$ 代入, 得

$$f(-1) = -3 - 1 + 10 = 6$$

且

$$g(-1) = -1 - 2 = -3$$

故

$$\text{上函數: } f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$$

以及

$$\text{下函數: } g(x) = -x^2 + 2x$$

另在 $[0, 2]$ 內, 選 $x = 1$ 代入, 得

$$f(1) = 3 - 1 - 10 = -8$$

且

$$g(1) = -1 + 2 = 1$$

故

$$\text{上函數: } g(x) = -x^2 + 2x$$

以及

$$\text{下函數: } f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$$

注意! 此例顯示出, 在不同的區間上, 可能有不同的上下函數, 所以正確地確認是必要的.

(iii) 根據圖示, 區域 R 為 R_1 與 R_2 的聯集, 故由 (i) 與 (ii) 的結論, 以及所圍出區域的面積公式, 得

$$\begin{aligned} R \text{ 的面積} &= R_1 \text{ 的面積} + R_2 \text{ 的面積} \\ &= \int_{-2}^0 [f(x) - g(x)] dx + \\ &\quad \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx \end{aligned}$$

又上式中的兩個被積函數僅差一負號，故代入

$$\begin{aligned}f(x) - g(x) &= (3x^3 - x^2 - 10x) - (-x^2 + 2x) \\ &= 3x^3 - 12x\end{aligned}$$

並根據微積分基本定理，得

$$\begin{aligned}R \text{ 的面積} &= \int_{-2}^0 (3x^3 - 12x)dx + \\ &\quad \int_0^2 (12x - 3x^3)dx \\ &= \left(\frac{3}{4}x^4 - 6x^2 \Big|_{-2}^0 \right) + \left(6x^2 - \frac{3}{4}x^4 \Big|_0^2 \right) \\ &= [0 - (12 - 24)] + [(24 - 12) - 0] \\ &= 12 + 12 = 24\end{aligned}$$

二. 應用

需求函數 (demand function)

$$p = D(x)$$

乃是由消費者的需求所反應出的產品售價，故為產品數量 x 的遞減函數。

供給函數 (supply function)

$$p = S(x)$$

乃是由生產者的提供 (或生產) 意願所反應出的產品售價, 故為產品數量 x 的遞增函數.

供需平衡點 (point of equilibrium)

$$(x_0, p_0)$$

為需求函數 $p = D(x)$ 與供給函數 $p = S(x)$ 的交點, 亦即, p_0 為消費者與生產者分別願意購買與生產 x_0 件產品時的產品售價, 如圖示.

因此, 定義

$$\text{消費者剩餘} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{x_0} [\text{需求函數} - p_0] dx$$

以及

$$\text{生產者剩餘} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{x_0} [p_0 - \text{供給函數}] dx$$

乃分別表示在供需平衡點 (x_0, p_0) 時, 消費者與生產者各自的獲益, 如圖示.

例 4. 設某產品的需求函數為

$$p = -0.36x + 9$$

且供給函數為

$$p = 0.14x + 2$$

試求消費者剩餘以及生產者剩餘.

<解> 根據消費者剩餘與生產者剩餘的定義, 需先求供需平衡點, 亦即, 需求函數與供給函數的交點, 故令二函數的售價相等, 也就是說,

$$-0.36x + 9 = 0.14x + 2$$

並解 x . 經由移項整理, 得

$$0.5x = 7$$

故

$$x = \frac{7}{0.5} = 14$$

以及

$$p = (0.14)(14) + 2 = 1.96 + 2 = 3.96$$

因此, 供需平衡點為 $(14, 3.96)$.

接著, 根據定義以及微積分基本定理,

$$\begin{aligned} \text{消費者剩餘} &= \int_0^{14} [(-0.36x + 9) - 3.96] dx \\ &= \int_0^{14} (-0.36x + 5.04) dx \\ &= -0.18x^2 + 5.04x \Big|_0^{14} \\ &= -0.18(14)^2 + 5.04(14) = 35.28 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\text{生產者剩餘} &= \int_0^{14} [3.96 - (0.14x + 2)]dx \\ &= \int_0^{14} (1.96 - 0.14x)dx \\ &= 1.96x - 0.07x^2 \Big|_0^{14} \\ &= 1.96(14) - 0.07(14)^2 = 13.72\end{aligned}$$