單元 35: 定積分與和的極限
(課本 §5.6)

問. 定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

的值爲多少?

(1) 當被積函數 $f(x)$ 的反導函數 (或不定積分) $F(x)$, 亦即,

$$F'(x) = f(x)$$

可求得時, 由微積分基本定理知,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(2) 若 $f(x)$ 的反導函數 $F(x)$ 不易求得時, 如何計算定積分的值?

可採用中點法則 (midpoint rule) 近似法, 來估計定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

的值, 如下述.

(1) 將閉區間 $[a,b]$ n 等分, 得每一子區間的寬度

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

(2) 求每一子區間的中點, 得

$$\text{中點: } x_1, \ldots, x_n$$

(3) 以 n 個高分別爲 $f(x_i)$ 且寬爲 Δx 的長方條面積和近似定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

亦即,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \Delta x f(x_1) + \cdots + \Delta x f(x_n) \\ &= \frac{b-a}{n}[f(x_1) + \cdots + f(x_n)] \end{aligned}$$

爲何如此? (1) 圖示: 僅考慮函數 f 爲非負的特例. 將閉區間 $[a,b]$ n 等分, 並以每個子區間中點的 f 值爲高, 形成 n 個長方條, 如圖示.

因此, 由定積分的面積觀點, f 所圍成區域的面積近似於 n 個長方條的面積和, 亦即,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x[f(x_1) + \cdots + f(x_n)]$$

且當分的愈細時, 亦即, 子區間數 n 愈大時, 估計愈準確, 得證.

(2) 事實: 若函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上連續, 則定積分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}[f(x_1) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$$

其中對於 $i = 1, \ldots, n$, x_i 爲第 i 個子區間中的任一點, 不一定爲中點, 當然取 x_i 爲中點, 一定成立, 並稱等號右邊極限內的和爲黎曼和 (Riemann sum), 亦即, 定積分爲黎曼和的極限.

因此, 由此事實知,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x[f(x_1) + \cdots + f(x_n)]$$

得證.

例 1. 令 R 爲

$$y = -x^2 + 5$$

在 $[0,2]$ 上所圍出的區域. 試以 $n=5$ 的中點法則估計 R 的面積, 並與眞正的面積比較.

<解> 首先, 將區間 $[0,2]$ 5 等分, 得子區間的寬

$$\Delta x = \frac{2-0}{5} = \frac{2}{5}$$

以及 5 個子區間, 如圖示.

接著, 由圖示, 得

$$\text{中點: } \frac{1}{5},\ \frac{3}{5},\ 1,\ \frac{7}{5},\ \frac{9}{5}$$

最後, 根據非負函數定積分的面積觀點, 以及中點法則, 得

$$\begin{aligned}
R \text{ 的面積} &= \int_0^2 (-x^2+5)dx \\
&\approx \frac{2}{5}\left[f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f(1)+\right. \\
&\qquad\left. f\left(\frac{7}{5}\right)+f\left(\frac{9}{5}\right)\right] \\
&= \frac{2}{5}\left\{\left[-\left(\frac{1}{5}\right)^2+5\right]+\left[-\left(\frac{3}{5}\right)^2+5\right]\right. \\
&\qquad +[-(1)^2+5]+\left[-\left(\frac{7}{5}\right)^2+5\right]+ \\
&\qquad \left.\left[-\left(\frac{9}{5}\right)^2+5\right]\right\} = \frac{920}{125} = 7.36
\end{aligned}$$

而根據微積分基本定理,

$$\begin{aligned}
\text{眞正的面積} &= \int_0^2 (-x^2+5)dx \\
&= -\frac{1}{3}x^3 + 5x\Big|_0^2 \\
&= -\frac{8}{3} + 10 = \frac{22}{3} \\
&\approx 7.33
\end{aligned}$$

與估計值 7.36 相近.

例 2. 試以 $n = 10$ 的中點法則估計

$$\int_1^3 \sqrt{x^2+1}dx$$

<解> 這是一個至目前所學, 無法以微積分基本定理求出眞正值的定積分, 因爲需先以反三角函數的積分法求出不定積分, 再根據微積分積本定理求出定積分的值, 而超出本書範圍, 故需以中點法則估計.

首先, 10 等分 $[1,3]$, 得子區間的寬

$$\Delta x = \frac{3-1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

以及 10 個子區間, 如圖示.

接著, 由圖示, 得

$$\text{中點: } 1+\frac{1}{10}=\frac{11}{10},\ \frac{13}{10},\ \frac{15}{10},\ \ldots,\ \frac{27}{10},\ \frac{29}{10}$$

最後, 根據中點法則, 得

$$\begin{aligned}
&\int_1^3 \sqrt{x^2+1}dx \\
\approx\ & \frac{1}{5}\left[f\left(\frac{11}{10}\right)+f\left(\frac{13}{10}\right)+\cdots+f\left(\frac{29}{10}\right)\right] \\
=\ & \frac{1}{5}\Big[\sqrt{(1.1)^2+1}+\sqrt{(1.3)^2+1}+\cdots+ \\
& \qquad \sqrt{(2.9)^2+1}\Big] \\
\approx\ & 4.504
\end{aligned}$$