單元 36: 代入法複習

一. 複習

一些學過的基本公式, 如下述.

(1) 常數規則: 若 k 爲一常數, 則

$$\int k dx = kx + C$$

(2) 冪次規則: 若 $n \neq -1$ 且 u 爲 x 的可微函數, 則簡單型爲

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

以及廣義型爲

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

(3) 指數規則: 若 u 爲 x 的可微函數, 則簡單型爲

$$\int e^x dx = e^x + C$$

且廣義型爲

$$\int e^u \frac{du}{dx} dx = \int e^u du = e^u + C$$

(4) 對數規則: 若 u 爲 x 的可微函數, 則簡單型爲

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

且廣義型爲

$$\int \frac{1}{u} \frac{du}{dx} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$$

二. 解答積分問題的步驟爲

(1) 記憶上述的基本公式.

(2) 以適當的技巧將原來的被積函數 (integrand) 改寫成能用的公式.

註. 積分不像微分, 單由函數的型式就可確定出該使用的規則, 而是一種型式轉換的技巧, 需先將原函數改寫成適

當的型式後, 才能確定出可使用的規則, 既然是一種技巧, 就要經由多練習而熟練之, 此乃不二門法.

三. 第一個積分技巧: 代入法 (上學期已學過, 相當於形式辨識法, 目的在於複習, 以預備其它技巧的學習), 過程如下述.

(1) 令 u 爲被積函數的一部分.

(2) 解 x 與 dx.

(3) 根據 (1) 與 (2) 將原式改寫成 u 與 du 的型式, 並形成可適用的公式.

(4) 將 u 反代回由 (3) 所求出的反導函數, 並以 x 爲變數作答.

例 1. 試求下列各項積分.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}dx$

(b) $\int x^2\sqrt{x^3-1}dx$

(c) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$

<解> (a) 根據經驗，通常選取 u 爲被積函數中合成函數部分的內部函數，而顯然地，合成函數爲 $(x+1)^{-2}$，故一個嘗試爲，令

$$u = x+1$$

則

$$du = (x+1)'dx = dx$$

且

$$x = u-1$$

接著，代入，經由整理，並根據對數規則以及冪次規則，得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{u-1}{u^2}du \\
&= \int \left(\frac{1}{u} - u^{-2}\right) du \\
&= \ln|u| + \frac{1}{u} + C \\
&= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C
\end{aligned}$$

其中最後一個等號乃是將 u 反代入, 把所得的積分表成 x 的數學式.

(b) 顯然地, 被積函數中的合成函數爲 $\sqrt{x^3-1}$, 故令

$$u = x^3 - 1$$

得

$$du = (x^3-1)'dx = 3x^2dx$$

接著, 經由同乘除 3 的改寫, 根據型式辨識法或代入法以及冪次規則, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3-1}\cdot 3x^2dx \\
&= \frac{1}{3}\int \sqrt{u}du \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C \\
&= \frac{2}{9}(x^3-1)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

(c) 因爲是一個分式且分子與分母都含有相同的指數函數, 一個經常的嘗試爲, 令分母爲 u, 並經由改寫後, 以對數規則積分, 亦即, 令

$$u = 1 + e^{2x}$$

並由此導出

$$du = (1+e^{2x})'dx = 2e^{2x}dx$$

故, 經由同乘除 2 的改寫, 並根據型式辨識法或代入法, 以及對數規則, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot 2e^{2x}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C \end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃因爲

$$u = 1+e^{2x} > 0$$

故可去絕對值所致.

例 2. 試求下列各項定積分.

(a) $\displaystyle\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{0.875} \frac{28}{9}x\sqrt[3]{1-x}dx$

<解> (a) 顯然地, 被積函數中的合成函數為 $\sqrt{2x-1}$, 故可嘗試令

$$u = 2x - 1$$

得

$$du = 2dx \;\;\Rightarrow\;\; dx = \frac{1}{2}du$$

以及

$$x = \frac{1}{2}(u+1)$$

另將對 x 的積分範圍換成對 u 的積分範圍:

$$\begin{aligned} x = 1 \;\;&\Rightarrow\;\; u = 2(1) - 1 = 1 \\ x = 5 \;\;&\Rightarrow\;\; u = 2(5) - 1 = 9 \end{aligned}$$

最後, 根據代入法, 冪次規則以及微積分基本定理, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2}(u+1) \cdot \frac{1}{2}du \\ &= \frac{1}{4}\int_1^9 (u^{1/2} + u^{-1/2})du \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2}\right]_1^9 \\ &= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{2}{3}\cdot 27 + 2\cdot 3\right) - \left(\frac{2}{3} + 2\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[22 - \frac{2}{3}\right] = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

(b) 明顯地, 被積函數中的合成函數部分爲 $\sqrt[3]{1-x}$, 故令

$$u = 1 - x$$

得

$$du = -dx \;\Rightarrow\; dx = -du$$

以及

$$x = 1 - u$$

另對應出的 u 的積分範圍爲

$$x = 0 \;\Rightarrow\; u = 1 - 0 = 1$$
$$x = 0.875 \;\Rightarrow\; u = 1 - 0.875 = 0.125$$

因此, 根據代入法, 冪次規則以及爲積分基本定理, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_1^{0.125} \frac{28}{9} \cdot (1-u) \cdot \sqrt[3]{u} \cdot (-du) \\
&= \frac{28}{9} \int_1^{0.125} (u^{4/3} - u^{1/3}) du \\
&= \frac{28}{9} \left[\frac{3}{7} u^{7/3} - \frac{3}{4} u^{4/3} \right]_1^{0.125} \\
&= \frac{28}{3} \left[\left(\frac{1}{7}(0.5)^7 - \frac{1}{4}(0.5)^4 \right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} \right) \right] \\
&\approx 0.865
\end{aligned}$$

其中第四個等號成立乃因爲

$$(0.125)^{1/3} = 0.5$$

所致.