單元 38: 部分分式與羅吉斯成長
(課本 §6.2)

一. 第三個技巧: 部分分式 (partial fractions)

適用於被積函數爲有理函數 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 時, 如

$$\int \frac{x+7}{x^2-x-6}dx$$

或

$$\int \frac{x^5+x-1}{x^4-x^3}dx$$

等. 執行的步驟爲

(1) 若被積函數 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 爲假分式, 亦即, 分子 $p(x)$ 的次方大於或等於分母 $q(x)$ 的次方時, 則以長除法得

$$\frac{p(x)}{q(x)} = m(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

其中 $\frac{r(x)}{q(x)}$ 爲眞分式, 亦即, 分子 $r(x)$ 的次方小於分母 $q(x)$ 的次方; 否則, 直接進入步驟 (2).

(2) 分解分母 $q(x)$ 成一次因式, 如 $(ax+b)$ 或 $(cx+d)^n$ 的乘積.

(3) 針對每個單一的一次因式 $(ax+b)$, 需要列出一項

$$\frac{A}{ax+b}$$

在部分分式內.

(4) 針對每個重複的一次因式 $(cx+d)^n$, 需要列出 n 項

$$\frac{A_1}{cx+d}+\frac{A_2}{(cx+d)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(cx+d)^n}$$

在部分分式內.

(5) 令原式或除過後的有理函數等於步驟 (3) 與 (4) 中的各項合, 並解

$$A, A_1, A_2, \ldots, A_n$$

(6) 逐項積分步驟 (3) 與 (4) 中的各項.

例 1. 試求下列各項積分.

(a) $\displaystyle\int \frac{x+7}{x^2-x-6}dx$

(b) $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$

(c) $\int \frac{x^5+x-1}{x^4-x^3}dx$

<解> 根據過去的經驗, 當被積函數爲有理函數或分式時, 需先檢查一下, 分母的導函數是否爲分子的常數倍, 若是的話, 則可採用代入法以及適當的公式求積分, 否則, 需採用第三個積分技巧 "部分分式". 很明顯地, 此三個被積函數的分母的導函數均不是分子的常數倍, 故代入法不適用, 而需嘗試部分分式, 如下述.

(a) 因爲被積函數是一眞分式, 故直接進入步驟 (2) 的分解分母, 得

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$

接著, 因爲分母分解成兩個均爲一次的因式, 故根據步驟 (3), 需針對每一個因式列出一項的部分分式, 並由步驟 (5), 得

$$\frac{x+7}{x^2-x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$$

且解 A 與 B, 如下述.

將上式兩邊同乘 $(x-3)(x+2)$, 得

$$x+7=A(x+2)+B(x-3)$$

代 $x=3$, 得

$$10=5A$$

故

$$A=2$$

再代 $x=-2$, 得

$$5=-5B$$

故

$$B=-1$$

最後, 根據步驟 (6), 逐項積分代入 A 與 B 後的各項, 以及代入法和對數規則, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{2}{x-3}dx+\int \frac{-1}{x+2}dx \\ &= 2\ln|x-3|-\ln|x+2|+C\end{aligned}$$

(b) 首先, 分解真分式的分母, 得

$$x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$$

爲一個一次因式以及另一個重複 2 次的一次因式. 故根據步驟 (3) 與 (4), 得

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

接著, 解 A, B, 與 C. 兩邊同乘 $x(x+1)^2$, 並合併同類項, 得

$$\begin{aligned} & 5x^2+20x+6 \\ &= A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx \\ &= (A+B)x^2+(2A+B+C)x+A \end{aligned}$$

經由比較係數, 得

$$\begin{aligned} A+B &= 5 \qquad (1) \\ 2A+B+C &= 20 \qquad (2) \\ A &= 6 \qquad (3) \end{aligned}$$

故, 由 (3) 式, 得

$$A=6$$

代入 (1) 式, 得

$$B=5-A=5-6=-1$$

再將 A 與 B 代入 (2) 式, 得

$$\begin{aligned} C &= 20 - 2A - B \\ &= 20 - 2(6) - (-1) = 9 \end{aligned}$$

最後, 逐項積分並根據選取

$$u = x + 1; \ du = dx$$

的代入法, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{6}{x} dx + \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{9}{(x+1)^2} dx \\ &= 6 \ln|x| - \ln|x+1| - \frac{9}{x+1} + C \end{aligned}$$

(c) 因爲被積函數爲一假分式, 故由除法, 得被積函數

$$\frac{x^5 + x - 1}{x^4 - x^3} = x + 1 + \frac{x^3 + x - 1}{x^4 - x^3} \qquad (4)$$

接著, 針對上式中的眞分式 $\frac{x^3+x-1}{x^4-x^3}$ 求部分分式, 得

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + x - 1}{x^4 - x^3} &= \frac{x^3 + x - 1}{x^3(x-1)} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} \qquad (5) \end{aligned}$$

此乃因爲分母分解成一個重複 3 次的一次因式 x^3 以及另一個一次因式 $x-1$, 並根據步驟 (3) 與 (4) 所致.

解 A, B, C, 與 D. 將上式兩邊同乘 $x^3(x-1)$, 並合併同類項, 得

$$\begin{aligned} & x^3+x-1 \\ & \quad = Ax^2(x-1)+Bx(x-1)+C(x-1)+Dx^3 \\ & \quad = (A+D)x^3+(B-A)x^2+(C-B)x-C \end{aligned}$$

比較係數, 得

$$A+D = 1 \tag{6}$$
$$B-A = 0 \tag{7}$$
$$C-B = 1 \tag{8}$$
$$-C = -1 \tag{9}$$

故, 由 (9) 式, 得

$$C=1$$

代入 (8) 式, 得

$$B=0$$

再將 $B=0$ 代入 (7) 式, 得

$$A=0$$

最後, 將 $A = 0$ 代入 (6) 式, 得

$$D = 1$$

因此, 根據 (4) 式與 (5) 式, 逐項積分, 以及冪次規則與對數規則, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int (x+1)dx + \int \frac{1}{x^3}dx + \int \frac{1}{x-1}dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{-2}x^{-2} + \ln|x-1| + C \\
&= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2x^2} + \ln|x-1| + C
\end{aligned}$$

二. 羅吉斯成長函數 (logistic growth function)

複習. 令 $y(t)$ 爲某物質在 t 時的數量. 若 $y(t)$ 的變化率與 $y(t)$ 成正比, 亦即,

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

其中 k 爲比率常數, 則

$$y = Ce^{kt}$$

其中 C 爲初始值, 並稱作指數成長函數 (exponential growth function).

性質. 當 $k > 0$, 且 $t \to \infty$, 則

$$y = Ce^{kt} \to Ce^{\infty} = \infty$$

亦即, 數量會無界地增加.

因此, 當數量 y 有上界時, 指數成長函數就不適合於描述 y.

問. 如何描述有上界的數量?

一可行的模型如下述. 若數量 y 有一上界 L, 亦即,

$$y \text{ 的值} \leq L$$

且 y 的變化率同時與 y 以及 y 和 L 的差成正比, 亦即,

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$$

其中 $k > 0$ 爲比率常數, 且 $0 < y < L$, 並稱作羅吉斯成長模型 (logistic growth model).

問. y 爲何?

答. 爲方便計, 考慮 $L = 1$. 故需要解

$$\frac{dy}{dt} = ky(1 - y),\ 0 < y < 1$$

過程如下述.

(1) 以微分式 (differential form) 型式表示: 兩邊同乘 dt, 得

$$dy = \frac{dy}{dt}dt = ky(1-y)dt$$

(2) 將含 y 的各項移至等號左邊, 得

$$\frac{1}{y(1-y)}dy = kdt$$

(3) 兩邊積分, 得

$$\int \frac{1}{y(1-y)}dy = \int kdt \tag{10}$$

等號左邊以部分分式積分, 得

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} \tag{11}$$

解 A 與 B: 兩邊同乘 $y(1-y)$, 得

$$1 = A(1-y) + By$$

代 $y=0$, 得

$$A = 1$$

又代 $y = 1$, 得

$$B = 1$$

因此, 將 A 與 B 代入, 並由 (10) 式與 (11) 式, 得

$$\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{1-y} dy = \int k dt$$

又因爲 $0 < y < 1$, 故由上式可導出,

$$\ln y - \ln(1-y) = kt + C_1$$

再根據對數性質, 得

$$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = kt + C_1$$

最後, 兩邊取指數函數並根據指數律化簡, 得

$$\frac{y}{1-y} = e^{kt+C_1} = e^{C_1} e^{kt} = Ce^{kt}$$

其中爲簡便計, 以 $C = e^{C_1}$ 表示一常數.

(4) 解 y: 將上式兩邊同乘 $1-y$, 得

$$y = Ce^{kt}(1-y) = Ce^{kt} - yCe^{kt}$$

合併含 y 的各項, 得

$$y(1+Ce^{kt}) = Ce^{kt}$$

因此,

$$y = \frac{Ce^{kt}}{1+Ce^{kt}}$$

最後, 分子分母同除 Ce^{kt}, 得

$$y = \frac{1}{1+\frac{1}{C}e^{-kt}} = \frac{1}{1+be^{-kt}}$$

其中以 $b = \frac{1}{C}$ 表示另一常數.

註. 一般的情況, 亦即, $0 < y < L$, 上界爲 L 時,

$$y = \frac{L}{1+be^{-kLt}}$$

其中 b 與 k 爲未知的待定常數.

另 y 的圖形如下, 爲一 S 型的曲線.

又當 $t \to \infty$ 時,

$$e^{-kLt} \to e^{-\infty} = 0^+$$

故,

$$y \to \frac{L}{1+0^+} = L$$

乃表現出 $0 < y < L$, 且以 L 爲其上界, 如所求.