單元 3: 方程式的圖形
(課本 §1.2)

一. 方程式的圖形 (Graph of Equation)

$$\text{方程式的圖形} = \{\text{所有滿足此方程式的點}\}$$

例如, 滿足方程式

$$y = 7 - 3x$$

的點 (有序對) 如下表

x	0	1	2	$\cdots$
y	7	4	1	$\cdots$

連結這些點, 得圖形爲一直線, 如圖示.

滿足方程式

$$y = x^2 - 2$$

的點如下表

x	0	1	-1	$\cdots$
y	-2	-1	-1	$\cdots$

連結這些點, 得圖形爲一開口向上的拋物線, 如圖示.

二. 截距 (Intercept)

一圖形的 y-截距乃圖形與 y-軸的交點; x-截距乃圖形與 x-軸的交點. 如圖示,

第一圖只有一個 y-截距, 沒有 x-截距;

第二圖有三個 x-截距, 一個 y-截距;

第三圖有一個 x-截距, 二個 y-截距;

第四圖無任何截距.

三. 求截距的方法

因爲 x-截距在 x-軸上, 故 $y = 0$, 且

求 x-截距

相當於

令 $y = 0$, 解 x

同理, 因爲 y-截距在 y-軸上, 故 $x = 0$, 且

求 y-截距

相當於

$$令\ x = 0,\ 解\ y$$

例如, 求

$$y = x^3 - 4x$$

的所有截距的過程如下.

x-截距: 令 $y = 0$, 解 x, 得

$$0 = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$$

由此得

$$x = -2,\ 0,\ 2$$

因此, x-截距為

$$(-2, 0),\ (0, 0),\ (2, 0)$$

y-截距: 令 $x = 0$, 解 y, 得

$$y = 0$$

故, y-截距為

$$(0, 0)$$

如圖示.

四. 圓 (Circle)

圓心 (center) 爲 (h, k), 半徑 (radius) 爲 r 的圓的標準式 (standard form) 爲

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

如圖示. 圓的一般式 (general form) 爲

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$$

可經由 "配方法" (completing the square), 而得出圓的標準式 (易繪圖的方程式), 例如, 試繪

$$4x^2+4y^2+20x-16y+37=0$$

的圖形.

<解> 兩邊同除 4, 得

$$x^2+y^2+5x-4y=-\frac{37}{4}$$

經由配方法, 得

$$x^2+5x+\frac{25}{4}+y^2-4y+4=-\frac{37}{4}+\frac{25}{4}+4$$

亦相當於

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y-2)^2=1$$

所以, 得一以 $\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$ 爲圓心, 半徑爲 1 的圓, 如圖示.

五. 交點 (Point of Intersection)

同時滿足二方程式的共同點稱爲交點. 例如, 試求

$$y = x^2 - 3 \text{ 與 } y = x - 1$$

的交點.

<解> 因爲是共同點, 故可令二個 y 值相等, 得

$$x^2 - 3 = x - 1$$

接著, 解 x, 得

$$x^2 - x - 2 = 0$$

經由因式分解, 上式相當於

$$(x-2)(x+1) = 0$$

故

$$x = -1 \text{ 或 } 2$$

由 $x = -1$, 得

$$y = (-1)^2 - 3 = -2$$

由 $x = 2$, 得

$$y = 2 - 1 = 1$$

因此, 二交點爲

$$(-1, -2) \text{ 與 } (2, 1)$$

例 1. **損益平衡點** (Break-Even Point). 設某產品的製造成本爲每單位 \$0.65, 且售價爲每單位 \$1.20. 又此公司的最初投資額爲 \$10,000. 試問需銷售多少單位的產品才可達損益平衡點?

<解> 設 x 爲銷售量, 則根據題意, 總成本 (total cost)

$$C = 10000 + 0.65x$$

且總收益 (total revenue)

$$R = 1.20x$$

又損益平衡點爲總成本與總收益相等的產量 x 以及所對應的成本或收益, 亦即, 滿足

$$C = R$$

的 x, 亦相當於解

$$10000 + 0.65x = 1.2x$$

整理後, 得

$$10000 = 0.55x$$

故, 當產量

$$x = \frac{10000}{0.55} \approx 18182$$

時, 可達損益平衡點, 如圖示.

數學模型 (Mathematical Model).

處理實際問題 (如, 預測, 分析) 時, 經常根據已有的資料 (data) 建構出一數學模型 (常以方程式的型式出現), 而在此模型下, 運用知識, 獲致所要的結果.

在建構數學模型時, 常面臨的兩難爲: 準確性 (accuracy) 與簡單性 (simplicity), 如何拿捏, 就相當於不同的建構方法, 是需要根據不同因素而調整的, 這就是專業及挑戰的部分.

例 2. **數學模型**. Dell 電腦 (Dell Computers) 及 Sun 微處理系統 (Sun Microsystem) 從 1992 年到 1996 年的年銷售額 (annual sales), (單位: 百萬元), 如下表:

年	1992	1993	1994	1995	1996
t	2	3	4	5	6
Dell	2014	2873	3475	5296	7759
Sun	3589	4309	4690	5902	7095

其中的 t 值爲以 1990 爲基準而平移後的數值, 亦即, 1990 年相當於 $t=0$, 1991 年相當於 $t=1$, 1992 年相當於 $t=2$, 以此類推.

在 1997 年的夏天, Value Line 公司預測 1998 年此二家公司的年銷售額分別爲

Dell 電腦 \$15,000

以及

Sun 微處理系統 \$10,350

試問你對此二預測的看法如何?

<解> 此乃一根據過去資料預測未來銷售額的問題. 可建構一可靠的模型, 然後與 Value Line 的推測相比較.
設根據一種稱爲 “最小平方迴歸分析” (least squares regression analysis) 的統計方法, 得 Dell 電腦的年銷售額

$$R_D = 316t^2 - 1138t + 3145,\ 2 \le t \le 6$$

且 Sun 微處理系統的年銷售額

$$R_S = 127t^2 - 155t + 3452,\ 2 \le t \le 6$$

則在 1998 年, 亦即, $t = 8$ 時, Dell 電腦的年銷售額爲

$$R_D(8) = 316(8)^2 - 1138(8) + 3145 = 14265$$

且 Sun 微處理系統的年銷售額爲

$$R_S(8) = 127(8)^2 - 155(8) + 3452 = 10340$$

因此, 建構出的模型的預測值與 Value Line 的預測值相當接近.