單元 42: 三維坐標系統
(課本 §7.1)

一. 空間的分割

空間可由三個相互垂直的直線, 稱作坐標軸, 它們分別爲 x-軸, y-軸, 與 z-軸, 所構成及描述其中任何一點的相對位置 (x, y, z), 如圖示.

三個坐標平面: xy-平面, yz-平面, 與 xz-平面, 可將空間分割成八個卦限 (octant), 分別爲

第一卦限 ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$)

第二卦限 ($x < 0$, $y > 0$, $z > 0$)

$$\vdots$$

第五卦限 ($x > 0$, $y > 0$, $z < 0$)

$$\vdots$$

第八卦限 ($x > 0$, $y < 0$, $z < 0$)

亦即, 在上半空間, 逆時針方向依序對應出前四個卦限, 以及在下半空間, 逆時針方向依序對應出後四個卦限, 如圖示.

二. 距離公式

二點 (x_1, y_1, z_1) 與 (x_2, y_2, z_2) 之間的距離

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

三. 中點公式

二點 (x_1, y_1, z_1) 與 (x_2, y_2, z_2) 所連成線段的中點 (midpoint) 爲

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2},\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

如圖示.

四. 球面方程式

以 (h, k, l) 爲球心, r 爲半徑的球面爲

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

稱作球面的標準式.

例 1. 試求球面

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 8 = 0$$

的球心與半徑.

<解> 將常數項 8 移至等號右邊, 並以配方法得球面方程式為

$$\begin{aligned} & x^2-2x+1+y^2+4y+4+z^2-6z+9 \\ = \ & -8+1+4+9 \end{aligned}$$

由此導出球面的標準式

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=6$$

故, 半徑為 $\sqrt{6}$, 且球心為 $(1,-2,3)$.

五. 空間曲面 (surface in space)

空間曲面為滿足 x, y, z 方程式的點集合, 如

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$$

為一空間曲面, 又可更具體地稱其為以 (h,k,l) 為球心, 半徑為 r 的球面.

六. 曲面截線 (trace of surface)

曲面截線為曲面與空間中的平面的交集, 如 xy-曲面截線為曲面與 xy-平面的交集, yz-曲面截線為曲面與 yz-平面的交集, xz-曲面截線為曲面與 xz-平面的交集.

空間中的曲面在視覺上不易整體地體會出，或繪出，但可透過曲面截線得出在二維坐標系統中的部分，並經由較熟悉的平面中的繪圖經驗而體會並描繪出，繼而對整體的曲面有較具體的認識.

例 2. 試求球面

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$$

的 xy-曲面截線.

<解> 根據上述曲面截線的定義，原問題乃相當於求球面與 xy-平面的交集. 又 xy-平面就是 $z=0$，故 xy-曲面截線為方程組

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25 \\ z=0 \end{cases}$$

亦相當於將 $z=0$ 代入球面方程式，得

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(0+4)^2=25$$

經由整理，得

$$(x-3)^2+(y-2)^2=9$$

乃一熟悉的，在 xy-平面上的平面方程式.

因此, 球面的 xy-曲面截線爲一個以 $(3,2)$ 爲圓心, 半徑爲 3 的圓.

另代 $z=-1$, 得

$$(x-3)^2+(y-2)^2=16$$

乃一在平面 $z=-1$ 上的圓, 其圓心爲 $(3,2,-1)$, 半徑爲 4, 亦可將此曲面截線投影在 xy-平面上, 得出同樣大小的圓.

若代 $z=1$, 得

$$(x-3)^2+(y-2)^2=0$$

僅 $(3,2)$ 滿足, 表示在平面 $z=1$ 上, 曲面截線退化爲一個點 $(3,2,1)$, 它在 xy-平面上的投影就是點 $(3,2)$.

亦可嘗試代其它的 z 值, 得出對應的, 與 xy-平面平行的曲面截線, 但當 $z>1$ 或 $z<-9$ 時, 不會產生曲面截線, 因爲此時的交集爲空集合.