單元 43: 空間中的曲面
(課本 §7.2)

僅探討兩類空間中的曲面.

一. 平面

空間中的平面乃 x, y, 與 z 的一次方程式

$$ax + by + cz = d$$

其中 a, b, c, 與 d 不全爲 0.

例 1. 試繪

(a) $3x + 2y + 4z = 12$

(b) $2x + 5y = 10$

(c) $3x = 12$

的圖形.

<解> (a) 代 $y = z = 0$, 得 x-截距

$$(4, 0, 0)$$

代 $x = z = 0$, 得 y-截距

$$(0, 6, 0)$$

代 $x = y = 0$, 得 z-截距

$$(0, 0, 3)$$

代 $z = 0$, 得 xy-曲面截線

$$3x + 2y = 12$$

代 $y = 0$, 得 xz-曲面截線

$$3x + 4z = 12$$

代 $x = 0$, 得 yz-曲面截線

$$2y + 4z = 12$$

繪出上述求得的截距與曲面截線, 得平面在第一卦限內的圖形, 如圖示.

(b) 代 $y = z = 0$, 得 x-截距

$$(5, 0, 0)$$

代 $x = z = 0$, 得 y-截距

$$(0, 2, 0)$$

無 z-截距, 因爲代 $x = y = 0$, 得 $0 = 10$, 一矛盾現象.

代 $z = 0$, 得 xy-曲面截線

$$2x + 5y = 10$$

代 $y = 0$, 得 xz-曲面截線

$$x = 5$$

代 $x = 0$, 得 yz-曲面截線

$$y = 2$$

繪出上述求得的截距與曲面截線, 得平面在第一卦限內的圖形, 如圖示.

另一觀點爲, 因爲原式中 z 未出現, 可視原式爲

$$2x + 5y + 0z = 12$$

表示 z 可爲任意值, 故圖形乃相當於將 xy-曲面截線 (與平面 $z = 0$ 的交集) 沿著 z-軸, 上下延伸 (與其他任意 z 值所對應的平面的交集), 所得出的圖形.

(c) 僅有 x-截距

$$(4, 0, 0)$$

以及 xy-曲面截線

$$x = 4$$

與 xz-曲面截線

$$x = 4$$

故根據繪出的截距與曲面截線, 得平面在第一卦限內的圖形, 如圖示.

另一觀點爲, 由於 y 與 z 未出現在原式, 乃表示 y 與 z 可爲任意值, 但 x 需恆爲 4, 故圖形乃相當於在 x-截距 $(4, 0, 0)$ 與 yz-平面保持 4 個單位下, 向任何方向延伸後的圖形, 亦相當於與 yz-平面平行且距離爲 4 的平面.

二. 二次曲面 (quadric surface)

滿足二次方程式

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

的點集合, 稱作二次曲面. 可分類成下述六種基本的二次曲面.

(1) 橢圓錐面 (elliptic cone)

橢圓錐面的標準式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

其特徵爲

(i) 與 xy-平面平行的曲面截線: 橢圓, 因爲代 $z=k$ (常數), 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}$$

乃一橢圓方程式, 故與平面 $z=k$ 的交集爲一橢圓. 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的橢圓; 且當 $k=0$ 時, 所得的 xy-曲面截線爲一退化的單點 $(0,0,0)$.

(ii) 與 xz-平面平行的曲面截線: 雙曲線, 因爲將 $y=k$ 代入, 得

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{k^2}{b^2}$$

乃一雙曲線方程式且 z^2 的係數爲正, 故與平面 $y=k$ 的交集爲一開口朝向 z-軸的雙曲線. 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的雙曲線; 且當 $k=0$ 時, 所得的 xz-曲面截線爲退化的二直線 $\frac{z}{c}=\pm\frac{x}{a}$.

(iii) 與 yz-平面平行的曲面截線: 雙曲線, 因爲代入常數 $x=k$, 得

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{a^2}$$

乃一雙曲線方程式且 z^2 的係數爲正, 故與平面 $x=k$ 的交集爲一開口朝向 z-軸的雙曲線. 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的雙曲線; 且當 $k=0$ 時, 所得的 xz-曲面截線爲退化的二直線 $\frac{z}{c}=\pm\frac{y}{b}$.

(iv) 軸心: z-軸, 係數爲負的變數.

根據上述的特徵, 可繪出對應的圖形, 如圖示.

(2) 橢圓拋物面 (elliptic paraboloid)

橢圓拋物面的標準式爲

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

其特徵爲

(i) 與 xy-平面平行的曲面截線: 橢圓, 因爲代入常數 $z=k>0$, 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k$$

乃一橢圓方程式, 故與上半空間中的平面 $z = k$ 的交集爲一橢圓. 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的橢圓; 且當 $k = 0$ 時, 所得的 xy-曲面截線爲一退化的單點 $(0, 0, 0)$.

(ii) 與 yz-平面平行的曲面截線: 拋物線, 因爲代入常數 $x = k$, 得

$$z = \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}$$

乃一拋物線方程式, 且 y^2 項的係數爲正, 故與鉛垂平面 $x = k$ 的交集爲一開口朝向正 z-軸的拋物線. 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的拋物線; 且當 $k = 0$ 時, 所得的 yz-曲面截線爲一開口朝向正 z-軸的拋物線 $z = \frac{y^2}{b^2}$.

(iii) 與 xz-平面平行的曲面截線: 拋物線, 因爲代入常數 $y = k$, 得

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}$$

乃一拋物線方程式, 且 x^2 項的係數爲正, 故與鉛垂平面 $y = k$ 的交集爲一開口朝向正 z-軸的拋物線. 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的拋物線; 且當 $k = 0$ 時, 所得的 xz-曲面截線爲一開口朝向正 z-軸的拋物線 $z = \frac{x^2}{a^2}$.

(iv) 軸心: z-軸, 一階的變數.

根據上述的特徵, 可繪出對應的圖形, 如圖示.

(3) 雙曲拋物面 (hyperbolic paraboloid)

雙曲拋物面的標準式爲

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

其特徵爲

(i) 與 xy-平面平行的曲面截線: 雙曲線, 因爲代入常數 $z = k > 0$, 得

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = k$$

乃一雙曲線方程式且 y^2 的係數爲正, 故在上半空間中與平面 $z = k$ 的交集爲一開口朝向 y-軸的雙曲線; 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的雙曲線. 代入 $z = k < 0$, 得

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -k$$

乃一雙曲線方程式且 x^2 的係數爲正, 故在下半空間中與平面 $z = k$ 的交集爲一開口朝向 x-軸的雙曲線; 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的雙曲線. 代 $z = 0$ 時, 得 xy-曲面截線爲二退化的直線 $\frac{y}{b} = \pm\frac{x}{a}$.

(ii) 與 xz-平面平行的曲面截線: 拋物線, 因爲代入常數 $y=k$, 得

$$z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}$$

乃一拋物線方程式, 且 x^2 項的係數爲負, 故與鉛垂平面 $y=k$ 的交集爲一開口朝向負 z-軸的拋物線. 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的拋物線; 且當 $k=0$ 時, 所得的 xz-曲面截線爲一開口朝向負 z-軸的拋物線 $z=-\frac{x^2}{a^2}$.

(iii) 與 yz-平面平行的曲面截線: 拋物線, 因爲代入常數 $x=k$, 得

$$z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{k^2}{a^2}$$

乃一拋物線方程式, 且 y^2 項的係數爲正, 故與鉛垂平面 $x=k$ 的交集爲一開口朝向正 z-軸的拋物線. 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的拋物線; 且當 $k=0$ 時, 所得的 yz-曲面截線爲一開口朝向正 z-軸的拋物線 $z=\frac{y^2}{b^2}$.

(iv) 軸心: z-軸, 一階的變數.

根據上述的特徵, 可繪出對應的圖形, 形如馬鞍, 如圖示.

(4) 橢圓球面 (ellipsoid)

橢圓球面的標準式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

其特徵爲

(i) 與 xy-平面平行的曲面截線: 橢圓, 因爲代入常數 $z=k$, $-c\le k\le c$, 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$$

乃一橢圓方程式, 故與水平平面 $z=k$ 的交集爲一橢圓. 當 $-c<k<c$ 時, 得互爲平行, 不同的橢圓. 當常數 $k=\pm c$ 時, 分別爲退化的單點 $(0,0,\pm c)$; 當 $k=0$ 時, 所得的 xy-曲面截線爲一橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 當 $k<-c$ 或 $k>c$ 時, 等號右邊爲負, 但左邊爲非負, 故無任何滿足方程式的點, 沒有曲面截線.

(ii) 與 xz-平面平行的曲面截線: 橢圓, 因爲代入常數 $y=k$, $-b\le k\le b$, 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}$$

乃一橢圓方程式, 故與鉛垂平面 $y=k$ 的交集爲一橢圓. 當 $-b<k<b$ 時, 得互爲平行, 不同的橢圓. 當常數 $k=\pm b$ 時, 分別爲退化的單點 $(0,\pm b,0)$; 當 $k=0$

時, 所得的 xy-曲面截線爲一橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 當 $k<-b$ 或 $k>b$ 時, 等號右邊爲負, 但左邊爲非負, 故無任何滿足方程式的點, 沒有曲面截線.

(iii) 與 yz-平面平行的曲面截線: 橢圓, 因爲代入常數 $x=k$, $-a\le k\le a$, 得

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}$$

乃一橢圓方程式, 故與鉛垂平面 $x=k$ 的交集爲一橢圓. 當 $-a<k<a$ 時, 得互爲平行, 不同的橢圓. 當常數 $k=\pm a$ 時, 分別爲退化的單點 $(\pm a,0,0)$; 當 $k=0$ 時, 所得的 yz-曲面截線爲一橢圓 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 當 $k<-a$ 或 $k>a$ 時, 等號右邊爲負, 但左邊爲非負, 故無任何滿足方程式的點, 沒有曲面截線.

根據上述的特徵, 可繪出對應的圖形, 如圖示.

(5) 單葉雙曲面 (hyperboloid of one sheet)

單葉雙曲面的標準式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

其特徵爲

(i) 與 xy-平面平行的曲面截線: 橢圓, 因爲代入常數 $z=k$, 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$$

乃一橢圓方程式, 故與水平平面 $z=k$ 的交集爲一橢圓. 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的橢圓; 且當 $k=0$ 時, 所得的 xy-曲面截線爲橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

(ii) 與 xz-平面平行的曲面截線: 雙曲線, 因爲代入常數 $y=k$, $-b<k<b$, 得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}$$

乃一雙曲線方程式, 且 x^2 項的係數爲正, 故與鉛垂平面 $y=k$ 的交集爲一開口朝向 x-軸的雙曲線, 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的雙曲線; 當 $k=0$ 時, 所得的 xz-曲面截線爲雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. 代入常數 $y=k$, $k<-b$ 或 $k>b$, 得

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{k^2}{b^2}-1$$

乃一雙曲線方程式, 且 z^2 項的係數爲正, 故與鉛垂平面 $y=k$ 的交集爲一開口朝向 z-軸的雙曲線, 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的雙曲線. 代 $y=\pm b$, 得曲面截線爲二退化的直線 $\frac{z}{c}=\pm\frac{x}{a}$.

(iii) 與 yz-平面平行的曲面截線: 雙曲線, 因爲代入常數 $x=k$, $-a<k<a$, 得

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}$$

乃一雙曲線方程式, 且 y^2 的係數爲正, 故與鉛垂平面 $x=k$ 的交集爲一開口朝向 y-軸的雙曲線, 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的雙曲線; 當 $k=0$ 時, 所得的 yz-曲面截線爲雙曲線 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. 代入常數 $x=k$, $k<-a$ 或 $k>a$, 得

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{a^2}-1$$

乃一雙曲線方程式, 且 z^2 項的係數爲正, 故與鉛垂平面 $x=k$ 的交集爲一開口朝向 z-軸的雙曲線, 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的雙曲線. 代 $x=\pm a$, 得曲面截線爲二退化的直線 $\frac{z}{c}=\pm\frac{y}{b}$.

(iv) 軸心: z-軸, 係數爲負的變數.

根據上述的特徵, 可繪出對應的圖形, 如圖示.

(6) 雙葉雙曲面 (hyperboloid of two sheets)

雙葉雙曲線的標準式爲

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

其特徵爲

(i) 與 xy-平面平行的曲面截線: 橢圓, 因爲代入常數 $z=k$, $k<-c$ 或 $k>c$, 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1$$

乃一橢圓方程式, 故與水平平面 $z=k$ 的交集爲一橢圓. 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的橢圓. 代 $z=\pm c$, 曲面截線分別爲退化的單點 $(0,0,\pm c)$. 代入 $z=k$, $-c<k<c$ 時, 等號右邊爲負, 但左邊爲非負, 故無任何滿足方程式的點, 沒有曲面截線.

(ii) 與 xz-平面平行的曲面截線: 雙曲線, 因爲代入常數 $y=k$, 得

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{k^2}{b^2}$$

乃一雙曲線方程式, 且 z^2 的係數爲正, 故與鉛垂平面 $y=k$ 的交集爲一開口朝向 z-軸的雙曲線, 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的雙曲線; 當 $k=0$ 時, 所得的 xz-曲面截線爲一雙曲線 $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

(iii) 與 yz-平面平行的曲面截線: 雙曲線, 因爲代入常數 $x=k$, 得

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{a^2}$$

乃一雙曲線方程式, 且 z^2 的係數爲正, 故與鉛垂平面 $x = k$ 的交集爲一開口朝向 z-軸的雙曲線, 不同的 k, 對應出互爲平行, 不同的雙曲線; 當 $k = 0$ 時, 所得的 yz-曲面截線爲一雙曲線 $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(iv) 軸心: z-軸, 係數爲正的變數.

根據上述的特徵, 可繪出對應的圖形, 如圖示.

註 1. 前面三種二次曲面: 橢圓錐面, 橢圓拋物面, 雙曲拋物面的方程式的特徵爲, 將變數移至等號左邊後, 等號右邊爲 0.

註 2. 後面三種二次曲面: 橢圓球面, 單葉雙曲面, 雙葉雙曲面的方程式的特徵爲, 將變數移至等號左邊後, 等號右邊爲 1.

註 3. 二種拋物面均有一個一次變數, 且橢圓拋物面乃相當於另二個變數的係數同號; 雙曲拋物面乃相當於另二個變數的係數不同號.

例 2. 試將下列二次曲面分類並繪其圖.

(a) $x - y^2 - z^2 = 0$

(b) $x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$

(c) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4 = 0$

(d) $2x^2 - y^2 + 2z^2 = 8$

<解> (a) 經由標準化, 得原式相當於

$$x = y^2 + z^2$$

含一次變數 x, 且另二個二次變數的係數同號, 故爲一軸心爲 x-軸, 頂點爲 $(0, 0, 0)$, 且開口朝向正 x-軸延伸的橢圓拋物面, 如圖示.

(b) 經由標準化, 得原式相當於

$$\frac{x^2}{4} - y^2 - z^2 = 1$$

其中 x^2 的係數爲正, 且另二個二次變數的係數均爲負, 故爲一軸心爲 x-軸, 頂點爲 $(\pm 2, 0, 0)$, 且開口朝向 x-軸兩端延伸的雙葉雙曲面, 如圖示.

(c) 標準化後, 得原式相當於

$$\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$$

乃一橢圓球面, 因爲三個二次變數的係數均爲正, 如圖示.

(d) 標準化後, 得原式相當於

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$$

其中只有一個二次變數 y^2 的係數爲負, 且另二個二次變數的係數均爲正, 故爲一軸心爲 y-軸, 且開口朝向 y-軸兩端延伸的單葉雙曲面, 如圖示.