單元 46: 雙變數函數的極值
(課本 §7.5)

定義. 設雙變數函數 $f(x, y)$ 定義在一含 (x_0, y_0) 的區域上, 則

(1) $f(x_0, y_0)$ 是一相對最大值, 若且唯若存在一個以 (x_0, y_0) 爲圓心的圓碟 R, 使得對所有 R 中的 (x, y),

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

亦即, 針對在 R 上的 $f(x, y)$ 的圖形而言, 點 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 是最高點, 如圖示.

(2) $f(x_0, y_0)$ 是一相對最小值, 若且爲若存在一以 (x_0, y_0) 爲圓心的圓碟 R, 使得對所有 R 中的 (x, y),

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

亦即, 針對在 R 上的 $f(x, y)$ 的圖形而言, 點 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 是最低點, 如圖示.

(3) 相對最大值或相對最小值統稱爲相對極值.

問. 如何找相對最大值以及相對最小值?

答. 基本上, 有兩種方法, 分別爲一階偏導函數檢定法與二階偏導函數檢定法, 如下述.

一. 一階偏導函數檢定法

若 $f(x_0, y_0)$ 是一相對極值且 f 的一階偏導函數存在, 則

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

且

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

爲何如此? 若 $f(x_0, y_0)$ 爲一相對極值, 則分別在 x-方向與 y-方向時, $f(x_0, y_0)$ 亦是相對極值, 故, 根據單變數函數的相對極值定理, 在 x-方向的斜率

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

且在 y-方向的斜率

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

如圖示.

也就是說, 一階偏導函數檢定法提供一個在一階偏導函數存在時, 產生相對極值的必要條件. 故, 類似於單變數函數的情形, 首先定義滿足此必要條件的點以及一階導函數不存在的點, 如下述.

定義. 若點 (x_0, y_0) 滿足

(i) $f_x(x_0, y_0) = 0$ 且 $f_y(x_0, y_0) = 0$, 或

(ii) $f_x(x_0, y_0)$ 或 $f_y(x_0, y_0)$ 未定義

則稱 (x_0, y_0) 爲 f 的臨界點 (critical point), 其中滿足 (i) 的稱爲第一類臨界點, 滿足 (ii) 的稱爲第二類臨界點.

接著, 根據一階偏導函數檢定法, 若 $f(x_0, y_0)$ 是一相對極值, 則 (x_0, y_0) 一定是一臨界點, 亦即, 相對極值只可能發生在臨界點上. 因此, 只需在臨界點上找相對極值即可.

例 1. 試求

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$$

的相對極值.

<解> (1) 找臨界點. 首先, 一階偏導函數為

$$f_x(x,y) = 4x + 8$$

且

$$f_y(x,y) = 2y - 6$$

均有定義, 故無第二類臨界點. 又由

$$f_x(x,y) = 4x + 8 = 0$$

得

$$x = -2$$

且由

$$f_y(x,y) = 2y - 6 = 0$$

得

$$y = 3$$

故得第一類臨界點

$$(-2, 3)$$

(2) 如何判斷? 因為臨界點僅為可能產生相對極值的候選點, 故需判斷在此點是否有相對極值, 以及是何種相對極值.

經由配方法, 得

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9) \\ &\quad +20-8-9 \\ &= 2(x+2)^2+(y-3)^2+3 \end{aligned}$$

其中等號右邊的前兩項爲非負的和, 故 $f(x,y)$ 的值爲大於或等於 3.

因此, 在點 $(-2,3)$ 有相對最小值 $f(-2,3)=3$.

例 2. 試求

$$f(x,y)=1-(x^2+y^2)^{1/3}$$

的相對極值.

<解> (1) 找臨界點. 首先, 一階偏導函數爲

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{-2/3}(2x) \\ &= \frac{-2x}{3(x^2+y^2)^{2/3}} \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= -\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{-2/3}(2y) \\ &= \frac{-2y}{3(x^2+y^2)^{2/3}} \end{aligned}$$

由於分母

$$3(x^2+y^2)^{2/3}=0$$

乃相當於

$$x=0,\ y=0$$

故, $f_x(x,y)$ 與 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 均未定義, 得第二類臨界點

$$(0,0)$$

無第一類臨界點, 因爲由

$$f_x(x,y)=0=f_y(x,y)$$

得

$$x=0,\ y=0$$

但在此點 $(0,0)$ 時, f_x 與 f_y 均未定義, 故需歸類爲第二類臨界點, 如上述.

(2) 如何判斷? 因爲

$$(x^2+y^2)^{1/3}\geq 0$$

故

$$f(x,y)=1-(x^2+y^2)^{1/3}\leq 1$$

因此,

$$f(0,0)=1$$

是一相對最大值.

二. 二階偏導函數檢定法

令 $f(x,y)$ 的一階偏導函數均連續, 且點 (a,b) 滿足

$$f_x(a,b)=0=f_y(a,b)$$

亦即, 點 (a,b) 爲第一類臨界點. 定義判別式

$$d(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-[f_{xy}(a,b)]^2$$

得

(1) 若 $d>0$ 且 $f_{xx}(a,b)>0$ (亦即, 圖形上凹), 則 $f(a,b)$ 是一相對最小值.

(2) 若 $d>0$ 且 $f_{xx}(a,b)<0$ (亦即, 圖形下凹), 則 $f(a,b)$ 是一相對最大值.

(3) 若 $d<0$, 則 $(a,b,f(a,b))$ 爲一鞍點 (saddle point), 亦即, $f(a,b)$ 既不是相對最大值也不是相對最小值.

(4) 若 $d = 0$, 則此檢定法失效, 亦即, 無法判斷是否有相對極值.

舉例說明, 爲何 $d < 0$ 時會得一鞍點? 令函數

$$z = f(x, y) = -x^2 + y^2$$

則根據二次曲面的分類, 爲一雙曲拋物面, 且在 $(0, 0, 0)$ 時, 不是最大值也不是最小值, 乃一鞍點, 如圖示.

接著, 說明在 $(0, 0)$ 時, 判別式 $d < 0$, 而與二階導函數檢定法一致. 首先, 解方程組

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -2x = 0 \\ f_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$

得第一類臨界點 $(0, 0)$.

又

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}[-2x] = -2$$

且

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}[2y] = 2$$

以及

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}[-2x] = 0$$

故, 在 $(0,0)$ 的判別式

$$\begin{aligned} d(0,0) &= f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - [f_{xy}(0,0)]^2 \\ &= (-2)(2) - (0)^2 = -4 \end{aligned}$$

乃一小於 0 的數, 與二階導函數檢定法一致.

例 3. 試求

$$f(x,y) = xy - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4$$

的相對極值與鞍點.

<解> (1) 求臨界點, 亦即, 相對極值候選點. 根據第一類臨界點的定義, 需解

$$f_x(x,y) = y - x^3 = 0 \qquad (1)$$

以及

$$f_y(x,y) = x - y^3 = 0 \qquad (2)$$

首先, 由 (1) 式, 得

$$y = x^3$$

接著, 將上式代入 (2) 式, 得

$$x - (x^3)^3 = x(1 - x^8) = 0$$

故,

$$x = -1,\ 0,\ 1$$

因此, 根據關係式 $y = x^3$, 第一類臨界點爲

$$(-1,-1),\ (0,0),\ (1,1)$$

無第二類臨界點, 因爲一階偏導函數均有定義.

(2) 判斷. 因爲都是屬於第一類臨界點, 故可由二階偏導函數檢定, 過程如下. 首先, 二階偏導函數爲

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[y - x^3\right] = -3x^2$$

且

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[x - y^3\right] = -3y^2$$

以及

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[y - x^3\right] = 1$$

故, 根據定義, 得判別式

$$d(x,y) = (-3x^2)(-3y^2) - (1)^2 = 9x^2y^2 - 1$$

接著, 以二階偏導函數檢定每一個第一類臨界點, 如下述.

在臨界點 $(1,1)$ 時, 判別式

$$d(1,1) = 9(1)^2(1)^2 - 1 = 8 > 0$$

表示有相對極值, 且

$$f_{xx}(1,1) = -3(1)^2 = -3 < 0$$

表示圖形下凹, 故得

$$f(1,1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

爲一相對最大值.

在臨界點 $(-1,-1)$ 時, 判別式

$$d(-1,-1) = 9(-1)^2(-1)^2 - 1 = 8 > 0$$

表示有相對極值, 且

$$f_{xx}(-1,-1) = -3(-1)^2 = -3 < 0$$

表示圖形下凹, 故得

$$f(-1,-1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

爲另一個相對最大值.

在臨界點 $(0,0)$ 時, 判別式

$$d(0,0) = 9(0)^2(0)^2 - 1 = -1 < 0$$

故無相對極值, 得

$$(0,0,f(0,0))=(0,0,0)$$

爲一鞍點.

例 4. 設二種替代型產品的需求函數分別爲

$$x_1=200(p_2-p_1)$$

以及

$$x_2=500+100p_1-180p_2$$

又製造產品 1 的成本爲 \$0.5 (元/單位), 且產品 2 的成本爲 \$0.75 (元/單位). 試求可獲致最大利潤的售價.

<解> 根據題意, 原問題乃相當於最大化利潤

$$P=R-C$$

其中 R 爲收益, C 爲成本.

又收益

$$\begin{aligned} R &= x_1p_1+x_2p_2 \\ &= 200(p_2-p_1)p_1+ \\ &\qquad (500+100p_1-180p_2)p_2 \\ &= -200p_1^2-180p_2^2+300p_1p_2+500p_2 \end{aligned}$$

且成本

$$
\begin{aligned}
C &= 0.5x_1 + 0.75x_2 \\
&= 0.5 \cdot 200(p_2 - p_1) + \\
&\qquad 0.75 \cdot (500 + 100p_1 - 180p_2) \\
&= 375 - 25p_1 - 35p_2
\end{aligned}
$$

所以, 將上述求得的 R 與 C 代入, 得利潤

$$
\begin{aligned}
P &= R - C \\
&= -200p_1^2 - 180p_2^2 + 300p_1p_2 + \\
&\qquad 25p_1 + 535p_2 - 375
\end{aligned}
$$

接著, 找臨界點. 根據第一類臨界點的定義, 乃相當於解方程組

$$\frac{\partial P}{\partial p_1} = -400p_1 + 300p_2 + 25 = 0 \qquad (3)$$

以及

$$\frac{\partial P}{\partial p_2} = 300p_1 - 360p_2 + 535 = 0 \qquad (4)$$

將 (3) 式乘以 3, 得

$$-1200p_1 + 900p_2 + 75 = 0$$

將 (4) 式乘以 4, 得

$$1200p_1 - 1440p_2 + 2140 = 0$$

再將上二式相加, 可消去 p_1, 並得

$$-540p_2 + 2215 = 0$$

經移項整理, 得

$$p_2 = \frac{2215}{540} = \frac{443}{108}$$

將 p_2 代入 (3) 式, 並化簡, 得

$$p_1 = \frac{1}{400}\left[300\left(\frac{443}{108}\right) + 25\right] = \frac{113}{36}$$

故, 第一類臨界點爲

$$\left(\frac{113}{36}, \frac{443}{108}\right)$$

無第二類臨界點, 因爲一階偏導函數均有定義.

最後, 判斷在臨界點是否會產生最大利潤. 首先, 二階偏導函數爲

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_1^2} = \frac{\partial}{\partial p_1}[-400p_1 + 300p_2 + 25] = -400$$

且

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_2^2} = \frac{\partial}{\partial p_2}[300p_1 - 360p_2 + 535] = -360$$

以及

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_2 \partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_2}[-400p_1 + 300p_2 + 25] = 300$$

故, 判別式

$$d(p_1, p_2) = (-400)(-360) - (300)^2 > 0$$

乃一常數, 且恆大於 0, 表示在臨界點有相對極值. 又二階偏導函數

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_1^2}(p_1, p_2) = -400 < 0$$

乃一常數, 且恆小於 0, 表示圖形下凹. 因此, 在代入臨界點後, 也有相同的結果, 故當

$$p_1 = \frac{113}{36}$$

且

$$p_2 = \frac{443}{108}$$

時, 有最大利潤

$$P\left(\frac{113}{36}, \frac{443}{108}\right)$$