單元 47: Lagrange 乘子法
(課本 §7.6)

以一個問題開始. 試問在第一卦限內滿足

(1) 底部坐落在 xy-平面上

(2) 二對立頂點分別在原點以及在平面

$$6x + 4y + 3z = 24$$

上

的長方體盒子, 如圖示, 的最大體積爲何?

根據圖示, 此問題乃相當於最佳化體積

$$V = xyz$$

稱作目標函數 (objective function), 且受限於 (subject to)

$$6x + 4y + 3z - 24 = 0$$

此乃因爲一個頂點 (x, y, z) 必須在平面上, 故要滿足平面方程式, 稱作限制條件 (constraint).

此種在限制條件下, 求目標函數的最佳化問題, 稱作受限型最佳化問題 (constrained optimization problem).

問. 如何解此種受限型最佳化問題?

答. 可採用下述的 Lagrange 乘子法 (Lagrange Multipliers). 若 $f(x,y)$ 在限制條件

$$g(x,y)=0$$

下, 有最大値或最小値, 則極値一定發生在

$$F(x,y,\lambda)\overset{\text{def}}{=}f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

的臨界點上.

註 1. 稱 λ 爲 Lagrange 乘子.

註 2. 只需求 $F(x,y,\lambda)$ 的臨界點, 再根據題意求出極値, 因爲 Lagrange 乘子法並未說明如何區分極値.

註 3. 可類推至三個或多個變數的函數, 如定義

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$$

並求 $F(x,y,z,\lambda)$ 的臨界點, 再根據題意得極值.

因此, 前述求最大體積的問題乃相當於令

$$f(x,y,z) = xyz$$

且

$$g(x,y,z) = 6x + 4y + 3z - 24 = 0$$

並引進一個 Lagrange 乘子 λ, 以及定義

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\lambda) &= f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) \\ &= xyz - \lambda(6x + 4y + 3z - 24) \end{aligned}$$

接著, 根據 Lagrange 乘子法, 需要求 $F(x,y,z,\lambda)$ 的臨界點, 此乃相當於解方程組

$$\begin{aligned} F_x &= yz - 6\lambda = 0 && (1) \\ F_y &= xz - 4\lambda = 0 && (2) \\ F_z &= xy - 3\lambda = 0 && (3) \\ F_\lambda &= -6x - 4y - 3z + 24 = 0 && (4) \end{aligned}$$

因爲所求的是最大體積, 故一個必要條件是

$$x > 0,\ \ y > 0,\ \ z > 0$$

由此可將 (1) 式除以 (2) 式, 而得

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$$

亦相當於

$$y = \frac{3}{2}x$$

同理, 由 (1) 式除以 (3) 式, 得

$$\frac{z}{x} = 2$$

亦相當於

$$z = 2x$$

此種解法的構想乃是將 y 與 z 均以 x 表示, 再代入 (4) 式, 得一個僅含 x 的方程式

$$-6x - 4\left(\frac{3}{2}x\right) - 3(2x) + 24 = 0$$

亦相當於

$$-6x - 6x - 6x + 24 = 0$$

故,

$$x = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

並根據上述 y 與 z 的 x 表示式,

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$$

且

$$z = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

因此, 最大體積爲

$$f\left(\frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{64}{9}$$

例 1. 設某產品的產量爲一 Cobb-Douglas 函數

$$f(x,y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$$

其中 x 爲勞力財的單位數, y 爲資本財的單位數. 若每一單位的勞力財爲 \$150, 且每一單位的資本財爲 \$250, 試求在總花費不超過 \$50,000 的最大產量.

<解> 根據題意, 原問題乃相當於最大化目標函數

$$f(x,y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$$

且受限於限制條件

$$150x + 250y = 50000$$

亦相當受限於限制條件的標準式

$$g(x,y) = 150x + 250y - 50000 = 0$$

乃一受限型最佳化問題.

故, 根據 Lagrange 乘子法, 需引進一個 Lagrange 乘子 λ, 並令

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) - \lambda g(x,y) \\ &= 100x^{3/4}y^{1/4} \\ &\qquad -\lambda(150x + 250y - 50000) \end{aligned}$$

接著, 求 $F(x,y,\lambda)$ 的臨界點, 亦相當於解方程組

$$\begin{aligned} F_x &= 75x^{-1/4}y^{1/4} - 150\lambda = 0 \quad (5) \\ F_y &= 25x^{3/4}y^{-3/4} - 250\lambda = 0 \quad (6) \\ F_\lambda &= -150x - 250y + 50000 = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

因爲 $x > 0$ 且 $y > 0$, 故由 (5) 除以 (6) 式, 得

$$\frac{75x^{-1/4}y^{1/4}}{25x^{3/4}y^{-3/4}} = \frac{150\lambda}{250\lambda}$$

根據指數律, 並化簡, 上式亦相當於

$$3 \cdot \frac{y}{x} = \frac{3}{5}$$

由此得

$$x = 5y$$

將上述 x 的 y 表示式, 代入 (7) 式, 得

$$-150(5y) - 250y + 50000 = 0$$

亦相當於

$$1000y = 50000$$

所以,

$$y = 50$$

且

$$x = 5(50) = 250$$

因此, 最大產量爲

$$\begin{aligned} f(250, 50) &= 100(250)^{3/4}(50)^{1/4} \\ &\approx 16719 \text{ (件)} \end{aligned}$$

例 2. 設二替代型產品的需求函數分別爲

$$x_1 = 200(p_2 - p_1)$$

以及

$$x_2 = 500 + 100p_1 - 180p_2$$

又製造產品 1 的成本為 \$0.5 (元/單位), 且產品 2 的成本為 \$0.75 (元/單位). 若總需求不超過 200 個單位, 試求可獲致最大利潤的售價.

<解> 根據題意, 原問題乃相當於最大化利潤

$$P = R - C = x_1p_1 + x_2p_2 - 0.5x_1 - 0.75x_2$$

且受限於

$$x_1 + x_2 = 200$$

亦相當於標準式

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 200 = 0$$

首先, 將 x_1 與 x_2 代入, 以 p_1 與 p_2 表示, 得利潤

$$\begin{aligned} P(p_1, p_2) &= 200(p_2 - p_1)p_1 \\ &\quad +(500 + 100p_1 - 180p_2)p_2 \\ &\quad\quad -0.5(200)(p_2 - p_1) \\ &\quad\quad\quad -0.75(500 + 100p_1 - 180p_2) \\ &= -200p_1^2 - 180p_2^2 + 300p_1p_2 \\ &\quad\quad\quad +25p_1 + 535p_2 - 375 \end{aligned}$$

同理, 得

$$\begin{aligned} g(p_1, p_2) &= 200(p_2 - p_1) \\ &\quad +(500 + 100p_1 - 180p_2) - 200 \\ &= -100p_1 + 20p_2 + 300 \end{aligned}$$

接著, 根據 Lagrange 乘子法, 令

$$F(p_1, p_2, \lambda) = P(p_1, p_2) - \lambda g(p_1, p_2)$$

並求 $F(p_1, p_2, \lambda)$ 的臨界點, 亦相當於解方程組

$$\begin{aligned} F_{p_1} &= -400p_1 + 300p_2 + 25 \\ &\qquad +100\lambda = 0 \qquad (8) \\ F_{p_2} &= -360p_2 + 300p_1 + 535 \\ &\qquad -20\lambda = 0 \qquad (9) \\ F_\lambda &= 100p_1 - 20p_2 - 300 = 0 \qquad (10) \end{aligned}$$

一個解法是將前二式的 λ 消去, 並與第三式形成一個二元一次方程組, 再解出 p_1 與 p_2. 也就是說, 先將 (9) 式乘以 5, 得

$$1500p_1 - 1800p_2 + 2675 - 100\lambda = 0$$

再將上式與 (8) 式相加, 得

$$1100p_1 - 1500p_2 + 2700 = 0$$

同除 100 後, 亦相當於

$$11p_1 - 15p_2 + 27 = 0 \tag{11}$$

接著, 將 (10) 式乘以 3, (11) 式乘以 4, 得

$$300p_1 - 60p_2 - 900 = 0$$

以及

$$44p_1 - 60p_2 + 108 = 0$$

最後, 將上二式相減, 得

$$256p_1 - 1008 = 0$$

故,

$$p_1 = \frac{1008}{256} = \frac{63}{16}$$

代入 (10) 式, 並化簡, 得

$$p_2 = \frac{1}{20}\left(100 \cdot \frac{63}{16} - 300\right) = \frac{75}{16}$$

因此, 最大利潤爲

$$P\left(\frac{63}{16}, \frac{75}{16}\right) \approx 712.21$$

例 3. 試最小化

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

且受限於

$$x + y - 3 = 0$$

以及

$$x + z - 5 = 0$$

<解> 這是一個有二個限制條件

$$g(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x + y - 3 = 0$$

以及

$$h(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x + z - 5 = 0$$

的受限型最佳化問題. 根據 Lagrange 乘子法的推廣, 需引進兩個 Lagrange 乘子 λ 與 μ, 並定義

$$\begin{aligned}
& F(x, y, z, \lambda, \mu) \\
&= f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z) \\
&= x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y - 3) \\
&\qquad\qquad\qquad -\mu(x + z - 5)
\end{aligned}$$

接著, 求 $F(x, y, z, \lambda, \mu)$ 的臨界點, 亦相當於解方程組

$$\begin{aligned}
F_x &= 2x - \lambda - \mu = 0 \\
F_y &= 2y - \lambda = 0 \\
F_z &= 2z - \mu = 0 \\
F_\lambda &= -x - y + 3 = 0 \\
F_\mu &= -x - z + 5 = 0
\end{aligned}$$

一個解法是由前三式將 x, y, 與 z 表成 λ 與 μ 的式子, 再代入最後二式, 形成以 λ 與 μ 爲未知數的二元一次方程組, 並由此解出 λ 與 μ, 再代回 x, y, 與 z 的表示式, 而求得臨界點. 也就是說, 由前三式得

$$x = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu$$

且

$$y = \frac{1}{2}\lambda$$

以及

$$z = \frac{1}{2}\mu$$

代入最後二式, 得

$$-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\lambda + 3 = 0$$
$$-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\mu + 5 = 0$$

經由整理, 亦相當於

$$-\lambda - \frac{1}{2}\mu + 3 = 0 \tag{12}$$
$$-\frac{1}{2}\lambda - \mu + 5 = 0 \tag{13}$$

接著, 將 (12) 式乘以 2, 得

$$-2\lambda - u + 6 = 0$$

並與 (13) 式相減, 得

$$-\frac{3}{2}\lambda + 1 = 0$$

故,

$$\lambda = \frac{2}{3}$$

代入 (13) 式, 得

$$\mu = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 5 = \frac{14}{3}$$

最後, 由 x, y, 與 z 的 λ 與 μ 的表示式, 得

$$x = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$$

且

$$y = \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{3}$$

以及

$$z = \frac{1}{2}\mu = \frac{7}{3}$$

因此, 最小值為

$$\begin{aligned} f\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right) &= \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 \\ &= \frac{64 + 1 + 49}{9} = \frac{114}{9} = \frac{38}{3} \end{aligned}$$