單元 50: 二重積分的應用
(課本 §7.9)

一. 實體的體積

設實體 (solid) S 爲介於曲面 $z=f(x,y)$ 與區域 R 間的部分, 如圖示, 則類似於推導出區域的面積公式的過程, 將區域 R 分割成 n 個小方形的區域, 並在每個小區域內選取一點的函數值 $f(x,y)$ 爲高, 形成長方柱, 再求此 n 個長方柱的體積和, 並在愈分愈細 (亦即, $n\to\infty$) 下, 求極限, 得

$$S \text{ 的體積} = \iint_R f(x,y)dA$$

其中經由適當的選取 $dA=dxdy$ 或 $dA=dydx$, 也就是說, 介於曲面 $z=f(x,y)$ 與區域 R 間的實體體積就是函數 $f(x,y)$ 在區域 R 上的二重積分.

例 1. 試求在第一卦限內由平面

$$x+2y+z=2$$

所圍成的實體的體積.

<解> (1) 繪圖, 決定出形成實體的曲面與區域. 經由繪出在第一卦限內的平面, 如圖示, 明顯地, 實體 S 爲曲面

$$z=2-x-2y$$

在區域

$$R:\begin{cases} 0\le x\le 2\\ 0\le y\le \frac{2-x}{2}\end{cases}$$

上所圍成的實體, 其中區域 R 乃是以垂直方向描述, 此乃因爲根據此平面的 xy-曲面截線

$$x+2y=2$$

以及 x-截距 $(2,0,0)$, 可形成垂直長方條由 $x=0$ 開始, 至 $x=2$, 且對於每一個固定的 x, 此長方條的範圍由 $y=0$ 開始, 直至直線 $x+2y=2$ 上的 y-值, 經由解 y, 亦相當於 $y=\frac{2-x}{2}$, 故得上述垂直方向描述的 R.

(2) 求體積. 根據構成此實體的曲面與區域, 以及實體的體積公式, 得

$$S \text{ 的體積} = \iint_R (2-x-2y)\,dA$$

接著, 根據 R 的垂直方向描述, 選取 $dA=dydx$, 並由上式得

$$S \text{ 的體積} \;=\; \int_0^2\int_0^{\frac{2-x}{2}}(2-x-2y)\,dydx$$

因爲是先對 y 積分, 且 y 的積分極限含有 $(2-x)$, 亦是被積函數中可視爲常數的部分, 故一個簡潔的作法是,

在對 y 積分時，將整個 $(2-x)$ 視為常數，並在代入積分的上下極限後，由上式得

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &= \int_0^2 [(2-x)y - y^2]\Big|_0^{(2-x)/2} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}(2-x)^2 - \frac{1}{4}(2-x)^2 dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{4}(2-x)^2 dx \end{aligned}$$

乃一單變數的定積分．最後，根據選取

$$u = 2-x,\ du = -dx$$

的代入法，由上式得

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &= \int_0^2 -\frac{1}{4}\underbrace{(2-x)^2}_{u^2} \cdot \underbrace{-dx}_{du} \\ &= -\frac{1}{12}(2-x)^3\Big|_0^2 \\ &= -\frac{1}{12}(0-8) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

<另解> 亦可根據此平面的 xy-曲面截線

$$x + 2y = 2$$

以及 y-截距 $(0, 1, 0)$，而形成水平長方條，由 $y = 0$ 開始，至 $y = 1$，且對於每一個固定的 y，此長方條的範

圍由 $x = 0$ 開始, 直至直線 $x + 2y = 2$ 上的 x 值, 經由解 x, 亦相當於 $x = 2 - 2y$, 故以水平方向描述, 得區域

$$R : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 2 - 2y \end{cases}$$

如圖示.

因此, 根據體積的公式, 在 R 的水平方向描述下, 選取 $dA = dxdy$, 以及類似於上述的簡潔作法, 在先對 x 積分時, 將被積函數中的整個 $(2 - 2y)$ 視爲常數, 並代入積分的上下極限後, 得

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &= \int_0^1 \int_0^{2-2y} (2 - x - 2y) dxdy \\ &= \int_0^1 \left[(2 - 2y)x - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^{2-2y} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[(2 - 2y)^2 - \frac{1}{2}(2 - 2y)^2 \right] dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(2 - 2y)^2 dy \end{aligned}$$

乃一單變數的定積分.

最後, 經由被積函數的化簡, 並根據選取

$$u = 1 - y, \ du = -dy$$

的代入法, 由上式得

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &= 2\int_0^1 (1-y)^2 dy \\ &= -2\int_0^1 \underbrace{(1-y)^2}_{u^2} \cdot \underbrace{-dy}_{du} \\ &= -\frac{2}{3}(1-y)^3\Big|_0^1 \\ &= -\frac{2}{3}(0-1) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

由上述的二種解法知, 體積可由二種不同的積分次序求得, 故關鍵乃在於選取一個易求的積分次序, 如例 2.

例 2. 設 S 乃是在第一卦限內, 由曲面

$$f(x,y) = e^{-x^2}$$

與三個平面: xy-平面, $y = x$, $x = 1$, 所圍成的實體. 試求 S 的體積.

<解> (1) 繪圖, 確定形成實體的曲面與區域. 因爲在第一卦限內, 並根據題意, 三個垂直平面 $y = x$, $x = 1$, 與 $y = 0$ 構成此實體的側面, 且 xy-平面爲底面, 以及曲面

$$z = f(x,y) = e^{-x^2} \geq 0$$

爲此實體的頂部, 如圖示. 另明顯地, 三個側面的投影構成區域 R, 如圖示, 故可形成垂直長方條, 由 $x = 0$ 開始, 至 $x = 1$, 且對每一個固定的 x, 此垂直長方條的範圍由 $y = 0$ 開始, 直至直線 $y = x$ 上的 y 值, 而得垂直方向描述的區域

$$R : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

又可形成水平長方條, 由 $y = 0$ 開始, 至 $y = 1$, 且對每一個固定的 y, 此水平長方條的範圍由直線 $y = x$ 上的 x 值, 亦即, $x = y$ 開始, 直至 $x = 1$, 而得水平方向描述的區域

$$R : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases}$$

(2) 求體積. 因爲有二種描述區域 R 的方式, 故對應出水平方向描述的積分次序 $dA = dxdy$ 或垂直方向描述的積分次序 $dA = dydx$, 而須根據被積函數適當地選取.

因爲被積函數僅含 e^{-x^2}, 缺少對 x 積分時, 以代入法所需的 $-2x$, 故先對 x 積分是不可能的, 而需選取先對 y 積分的積分次序 $dA = dydx$, 以及對應的 R 的垂直方向描述, 並根據體積的公式, 得

$$S \text{ 的體積} = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dydx$$

接著, 在視 e^{-x^2} 爲常數下, 先對 y 積分, 並代入 y 的積分上下極限後, 由上式得

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &= \int_0^1 e^{-x^2} y\Big|_{y=0}^{x} dx \\ &= \int_0^1 x e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

乃一單變數的定積分.

最後, 根據選取

$$u = -x^2,\ du = -2xdx$$

的代入法, 由上式得

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{e^{-x^2}}_{e^u} \cdot \underbrace{-2xdx}_{du} \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}(e^{-1} - e^0) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

註. 若採用水平方向的描述, 則對應的積分次序爲 $dxdy$, 且

$$S \text{ 的體積} = \int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dxdy$$

但此時無法先對 x 積分, 故需改換成另一種可積分的積分次序以及對應的區域描述法, 如上述. 因此, 選取易求的積分次序是非常關鍵的, 可經由經常的練習培養出此種直覺.

二. 函數在一區域上的平均值

類似於單變數函數在一區間上的平均值, 若區域 R 的面積為 A, 則雙變數函數 $f(x,y)$ 在區域 R 上的平均值 (average value)

$$f_{\text{avg}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{A}\iint_R f(x,y)\,dA$$

例 3. 設產品 1 銷售 x 單位與產品 2 銷售 y 單位的利潤為

$$P = -(x-200)^2 - (y-100)^2 + 5000$$

若產品 1 在一週內的銷售量可介於 150 單位與 200 單位間, 且產品 2 可介於 80 單位與 100 單位間. 試求一週的平均利潤.

<解> 根據平均值的定義, 首先需確定在一週內二產品的可能銷售量範圍 R. 由題意, 此區域

$$R: \begin{cases} 150 \le x \le 200 \\ 80 \le y \le 100 \end{cases}$$

如圖示, 乃一長方形. 由此得

$$R \text{ 的面積} = 50 \cdot 20 = 1000$$

故, 根據定義, 在一週內的平均利潤就是在此週內的利潤的二重積分並除以在此週的可能銷售量的面積, 亦即, 由上述 R 的垂直方向描述法, 選取積分次序 $dydx$, 以及上述 R 的面積, 得平均利潤

$$\begin{aligned} P_{\text{avg}} &= \frac{1}{1000}\int_{150}^{200}\int_{80}^{100}[-(x-200)^2 \\ &\qquad -(y-100)^2+5000]dydx \end{aligned}$$

接著, 先對 y 積分並代入 y 的積分上下極限, 以及化簡, 由上式得

$$\begin{aligned} P_{\text{avg}} &= \frac{1}{1000}\int_{150}^{200}\left[-(x-200)^2 y \right.\\ &\qquad \left. -\frac{1}{3}(y-100)^3+5000y\Big|_{y=80}^{100}\right] dx \\ &= \frac{1}{1000}\int_{150}^{200}\left[-20(x-200)^2 \right.\\ &\qquad \left. +\frac{1}{3}(-20)^3+100000\right] dx \\ &= \frac{1}{1000}\int_{150}^{200}\left[-20(x-200)^2 \right.\\ &\qquad \left. +\frac{292000}{3}\right] dx \end{aligned}$$

乃一單變數的定積分. 最後, 對 x 積分並代入 x 的積分上下極限, 以及化簡, 由上式得

$$\begin{aligned} P_{\text{avg}} &= \frac{1}{1000}\Big[-\frac{20}{3}(x-200)^3 \\ &\qquad + \frac{292000}{3}x\Big|_{150}^{200}\Big] \\ &= \frac{1}{3000}[20(-50)^3 + 292000(50)] \\ &= \frac{1}{60}(-50000 + 292000) \\ &= \frac{242000}{60} = \frac{12100}{3} \approx 4033 \end{aligned}$$

例 4. 設 R 爲 $x = y^2$ 與 $y = x - 2$ 所圍成的區域, 且 S 爲介於曲面 $f(x, y) = 2xy^2$ 與區域 R 間的實體. 試求 S 的體積.

<解> (1) 繪圖, 確定區域 R. 首先, 求交點, 亦即, 由直線 $y = x - 2$ 得 $x = y + 2$, 並令此直線與形成區域的拋物線 $x = y^2$ 的 x 值相等, 也就是

$$y + 2 = y^2$$

且解 y. 經由移項並分解, 得

$$y^2 - y - 2 = (y-2)(y+1) = 0$$

故,

$$y = -1,\ 2$$

當 $y = -1$ 時, 對應的

$$x = (-1)^2 = 1$$

且當 $y = 2$ 時, 對應的

$$x = 2^2 = 4$$

故二交點爲

$$(1, -1),\ (4, 2)$$

接著, 標出此二交點, 並連結, 得直線 $y = x - 2$. 又二次式 $x = y^2$ 是一頂點爲 $(0, 0)$ 且開口向右的拋物線, 故連結此頂點與二交點, 得拋物線, 以及所圍出的區域 R, 如圖示.

(2) 描述區域 R, 確定易求的二重積分. 由圖示, 可採用垂直方向或水平方向, 兩種方式描述 R. 但以垂直方向描述時, 所形成的垂直長方條在 $x < 1$ 時, 其範圍是由下拋物線的 x 值開始, 至上拋物線的 x 值; 當 $x > 1$ 時, 其範圍卻是由直線的 x 值開始, 至上拋物線的 x 值, 亦即, 開始的 x 值會落在兩個不同的曲線上, 而會導致不同的積分下極限, 並形成兩個二重積分的和, 使得計算複雜, 故先

不考慮此種描述的方式. 以水平方向描述時, 所形成的水平長方條均由拋物線的 x 值開始, 至直線的 x 值, 始終一致, 是一個可考慮的方式; 更明確地, 可形成此種水平長方條, 由 $y = -1$ 開始, 至 $y = 2$, 並且對每一個固定的 y 值, 此水平長方條的範圍由拋物線 $x = y^2$ 上的 x 值開始, 直至直線 $y = x - 2$ 上的 x 值, 亦即, 經由移項整理, $x = y + 2$, 而得水平方向描述的

$$R : \begin{cases} -1 \le y \le 2 \\ y^2 \le x \le y + 2 \end{cases}$$

(3) 求體積. 根據體積公式, 以及上述 R 的水平方向描述, 選取積分次序 $dxdy$, 得

$$S \text{ 的體積} = \int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} 2xy^2 dxdy$$

接著, 視被積函數中含 y 的部分爲常數, 先對 x 積分, 並代入 x 的積分上下極限, 以及化簡, 由上式得

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &= \int_{-1}^{2} \left(y^2 x^2 \Big|_{x=y^2}^{y+2} \right) dy \\ &= \int_{-1}^{2} y^2 \left[(y+2)^2 - (y^2)^2 \right] dy \\ &= \int_{-1}^{2} (y^4 + 4y^3 + 4y^2 - y^6) dy \end{aligned}$$

乃一單變數的定積分.

最後, 對 y 積分, 並代入 y 的積分上下極限, 以及化簡, 由上式得

$$\begin{aligned}
S \text{ 的體積} &= \frac{1}{5}y^5 + y^4 + \frac{4}{3}y^3 - \frac{1}{7}y^7\Big|_{-1}^{2} \\
&= \left(\frac{32}{5} + 16 + \frac{32}{3} - \frac{128}{7}\right) \\
&\qquad - \left(-\frac{1}{5} + 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{7}\right) \\
&= \frac{531}{35} \approx 15.17
\end{aligned}$$

註. 若以垂直方向描述例 4 的區域時, 得區域

$$R: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x} \end{cases} \bigcup \begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ x - 2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$

以及對應的積分次序 $dydx$ 下,

$$\begin{aligned}
S \text{ 的體積} &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 2xy^2 dydx \\
&\qquad + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} 2xy^2 dydx
\end{aligned}$$

一個複雜的描述方式及兩個二重積分的和, 故計算是冗長且易出錯的. 請自行確認, 並嘗試計算出體積.

例 5. 設一區域 R 的範圍爲

$$R : \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ -5 \le y \le 5 \end{cases}$$

且此區域的人口密度函數爲

$$f(x,y) = \frac{50000}{x+|y|+1}$$

試求此區域的人口數.

<解> 若一區域 R 的人口密度函數爲 $f(x,y)$, 則此區域的

$$人口數 \overset{\text{def}}{=} \iint_R f(x,y)\,dA$$

亦即, 人口密度函數在此區域的二重積分, 符合直觀.

因爲此密度函數含有 y 的絕對值, 對 y 積分時, 會造成困擾, 故需根據題意, 設法先處理此絕對值. 經由繪圖, 此區域 R 是對稱於 x-軸, 且密度函數在代入 y 與 $-y$ 後, 得相同的值, 故亦對稱於 x-軸.

因此, 根據人口數的定義, 上述的對稱性, 以及選取積分次序 $dydx$, 得區域 R 的

$$人口數 = 2\int_0^4 \int_0^5 \frac{50000}{x+y+1}dydx$$

其中 y 不含絕對值, 因爲此時 y 的範圍爲正, 故可去絕對值.

接著, 先對 y 積分, 並根據積分的對數律, 以及代入 y 的積分上下極限後, 由上式得

$$\begin{aligned}
\text{人口數} &= 100000\int_0^4 \left[\ln(x+y+1)\Big|_{y=0}^{5}\right] dx \\
&= 100000\int_0^4 [\ln(x+6)-\ln(x+1)]dx
\end{aligned}$$

乃一單變數的定積分.

最後, 由分部積分的結論

$$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$$

以及分別選取

$$u = x+6,\ du = dx$$

與

$$u = x+1,\ du = dx$$

的代入法, 並代入 x 的積分上下極限, 由上式得

$$\begin{aligned}
\text{人口數} &= 100000[(x+6)\ln(x+6)-(x+6) \\
&\qquad -(x+1)\ln(x+1)+(x+1)]\Big|_0^4 \\
&= 100000(10\ln 10 - 5\ln 5 - 6\ln 6) \\
&\approx 422810
\end{aligned}$$

例 6. 試求二重積分

$$\int_0^{\ln 10}\int_{e^x}^{10}\frac{1}{\ln y}dydx$$

<解> 首先, 確認給定的二重積分的積分極限與積分次序是一致的, 亦即, 先對 y 積分, 積分的上下極限爲二個 x 的函數; 再對 x 積分, 積分的上下極限爲二實數. 但先對 y 積分時, 被積函數 $\frac{1}{\ln y}$ 缺少代入法所需的 $\frac{1}{y}$, 故直接積分, 亦即, 積分次序爲 $dydx$, 不可能. 故需將積分次序改爲 $dxdy$, 亦即, 要以不同的方式重新描述 R, 如下述.

根據原式, 乃是以垂直方向描述 R, 得

$$R:\begin{cases}0\le x\le \ln 10\\ e^x\le y\le 10\end{cases}$$

如圖示, 其中指數函數 $y=e^x$ 與鉛垂線 $x=0$ 的交點爲 $(0,1)$, 且與鉛垂線 $x=\ln 10$ 以及水平線 $y=10$ 的交點均爲 $(\ln 10, 10)$. 而此區域亦可以水平方向描述, 形成水平長方條由 $y=1$ 開始, 至 $y=10$, 且對每一個固定的 y 值, 此水平長方條的範圍由 $x=0$ 開始, 直至 $y=e^x$ 上的 x 值, 經由兩邊同取對數並解 x, 亦相當於 $x=\ln y$, 得水平方向描述的

$$R:\begin{cases}1\le y\le 10\\ 0\le x\le \ln y\end{cases}$$

因此, 根據對應的積分次序 $dxdy$,

$$原式 = \int_1^{10} \int_0^{\ln y} \frac{1}{\ln y} dxdy$$

接著, 視整個被積函數爲常數, 先對 x 積分, 並代入 x 的積分上下極限, 由上式得

$$\begin{aligned} 原式 &= \int_1^{10} \left(\frac{1}{\ln y} x \Big|_{x=0}^{\ln y} \right) dy \\ &= \int_1^{10} 1 dy \end{aligned}$$

轉換成一個非常簡單的常數函數的定積分!

最後, 對 y 積分, 並代入 y 的積分上下極限, 由上式得

$$原式 = y\Big|_1^{10} = 10 - 1 = 9$$

練習題. 設 R 爲在第一象限內, 由拋物線 $y = x^2$ 與水平線 $y = 3$ 所圍出的區域. 試求二重積分

$$\iint_R \frac{x}{1+y^2} dA$$