

單元 51: 三角函數的導函數

(課本 §8.4)

一. 二個極限公式

下述為推導三角函數的導函數所需的公式,

- (i) 當 x 趨近於 0 時, 同時會趨近於 0 的 $\sin x$ 與 x 愈近似, 亦即,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

證明, 暫略, 以後再證; 但可用計算器驗證, 如課本; 亦可由圖示知, 當 $x \rightarrow 0$ 時, $x \approx \sin x$, 因而比較的極限趨近於 1, 亦即,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

如所求.

- (ii) 當 x 趨近於 0 時, 趨近於 0 的 $1 - \cos x$ 會遠小於亦趨近 0 的 x , 亦即,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

<證> 首先, 分子分母同乘以 $(1 + \cos x)$, 並根據平方差以及三角恆等式化簡, 得

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos x}{x} &= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x}\end{aligned}$$

接著, 因為 $\sin x$ 與 $\cos x$ 均是連續函數, 並根據求極限的法則以及 (i) 中的公式, 由上式得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\ &= 1 \cdot \frac{\sin 0}{1 + \cos 0} \\ &= 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 1 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

如所求.

二. 三角函數的導函數

根據上述的公式, 得下述六個三角函數的導函數,

$$(1) \quad \frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$$

$$(3) \quad \frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$$

$$(4) \quad \frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$$

$$(5) \quad \frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$$

$$(6) \quad \frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$$

<證> (1) 首先, 根據導函數的定義,

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

接著, 根據三角函數的和角公式

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin \theta \cos \phi \pm \cos \theta \sin \phi$$

以及化簡整理, 由上式得

$$\begin{aligned} \text{右邊分式} &= \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\ &= \cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - \sin x \cdot \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

最後, 令 $\Delta x \rightarrow 0$, 取極限, 並根據求極限的法則, 以及公式 (i) 與公式 (ii), 由上式得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\sin x] &= \cos x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\ &\quad - \sin x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \\ &= \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 0 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

得證.

(2) 首先, 根據導函數的定義,

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

接著, 根據三角函數的和角公式

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos \theta \cos \phi \mp \sin \theta \sin \phi$$

以及化簡整理, 由上式得

$$\begin{aligned} \text{右邊分式} &= \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} \\ &= -\sin x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - \cos x \cdot \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

最後, 令 $\Delta x \rightarrow 0$, 取極限, 並根據求極限的法則, 以及公式 (i) 與公式 (ii), 由上式得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\cos x] &= -\sin x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\ &\quad - \cos x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \\ &= -\sin x \cdot 1 - \cos x \cdot 0 \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

得證.

(3) 根據 $\tan x$ 的定義, 微分的除法規則, 以及上述求得的 $\sin x$ 與 $\cos x$ 的導函數, 並以三角恆等式化簡, 且由 $\sec x$ 的定義, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\tan x] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ &= \frac{\frac{d}{dx}[\sin x](\cos x) - (\sin x)\frac{d}{dx}[\cos x]}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

如所求.

(4) 根據 $\cot x$ 的定義, 微分的除法規則, 以及上述求得的 $\sin x$ 與 $\cos x$ 的導函數, 並以三角恆等式化簡, 且由 $\csc x$ 的定義, 得

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}[\cot x] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right] \\
 &= \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} \\
 &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x
 \end{aligned}$$

如所求.

(5) 根據 $\sec x$ 的定義, 微分的廣義冪次規則, 以及上述求得的 $\cos x$ 的導函數, 並整理化簡, 得

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}[\sec x] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\cos x} \right] \\
 &= \frac{d}{dx} [(\cos x)^{-1}] \\
 &= -(\cos x)^{-2} \cdot \frac{d}{dx}[\cos x] \\
 &= -(\cos x)^{-2} \cdot (-\sin x) \\
 &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x
 \end{aligned}$$

得證.

(6) 根據 $\csc x$ 的定義, 微分的廣義冪次規則, 以及上述求得的 $\sin x$ 的導函數, 並整理化簡, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\csc x] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sin x} \right] \\ &= \frac{d}{dx} [(\sin x)^{-1}] \\ &= -(\sin x)^{-2} \cdot \frac{d}{dx}[\sin x] \\ &= -(\sin x)^{-2} \cdot (\cos x) \\ &= -\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x\end{aligned}$$

得證.

三. 三角合成函數的導函數

令 u 為 x 的可微函數, 則根據上述公式以及連鎖規則, 六個三角合成函數的導函數如下,

$$(1) \quad \frac{d}{dx}[\sin u] = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx}[\cos u] = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(3) \quad \frac{d}{dx}[\tan u] = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(4) \quad \frac{d}{dx}[\cot u] = -\csc^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(5) \quad \frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u \tan u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(6) \quad \frac{d}{dx}[\csc u] = -\csc u \cot u \cdot \frac{du}{dx}$$

例 1. 試求下列各項的導函數.

$$(a) \quad y = \sin(x^2 - 1)$$

$$(b) \quad y = \tan(e^x)$$

$$(c) \quad f(x) = \tan^4(3x)$$

$$(d) \quad y = \csc\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$(e) g(t) = \sqrt{\sin 5t}$$

$$(f) h(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$(g) y = \ln |\sec x + \tan x|$$

<解> (a) 根據 \sin 合成函數的微分公式, 也就是說, 由連鎖規則, 先對 \sin 函數微分得 \cos 函數, 並代入內部函數 $x^2 - 1$ 後, 再乘上 $x^2 - 1$ 的導函數, 可得

$$\begin{aligned} y' &= \cos(x^2 - 1) \frac{d}{dx} [x^2 - 1] \\ &= 2x \cos(x^2 - 1) \end{aligned}$$

(b) 根據 \tan 合成函數的微分公式, 先對 \tan 函數微分得 \sec^2 函數, 並代入內部函數 e^x 後, 再乘上 e^x 的導函數, 可得

$$\begin{aligned} y' &= \sec^2(e^x) \frac{d}{dx} [e^x] \\ &= e^x \sec^2(e^x) \end{aligned}$$

(c) 根據慣用法,

$$f(x) = \tan^4(3x) = [\tan(3x)]^4$$

乃一 \tan 合成函數的 4 次方.

故由廣義冪次規則, 以及 \tan 合成函數的微分公式, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 [\tan(3x)]^3 \cdot \frac{d}{dx} [\tan(3x)] \\ &= 4 \tan^3(3x) \cdot \sec^2(3x) \frac{d}{dx} [3x] \\ &= 12 \tan^3(3x) \sec^2(3x) \end{aligned}$$

(d) 根據 \csc 合成函數的微分公式, 先對 \csc 函數微分得 $-\csc \cot$ 函數, 並代入內部函數 $\frac{x}{3}$ 後, 再乘上 $\frac{x}{3}$ 的導函數, 可得

$$\begin{aligned} y' &= -\csc\left(\frac{x}{3}\right) \cot\left(\frac{x}{3}\right) \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{3}\right] \\ &= -\frac{1}{3} \csc\left(\frac{x}{3}\right) \cot\left(\frac{x}{3}\right) \end{aligned}$$

(e) 原函數是一 \sin 合成函數的 $\frac{1}{2}$ 次方, 故根據廣義冪次規則, 以及 \sin 合成函數的微分公式, 並將冪次為負的移至分母的化簡整理, 得

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{2} (\sin 5t)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dt} [\sin 5t] \\ &= \frac{1}{2} (\sin 5t)^{-1/2} \cdot \cos(5t) \frac{d}{dt} [5t] \\ &= \frac{5 \cos 5t}{2\sqrt{\sin 5t}} \end{aligned}$$

(f) 根據微分的除法規則以及 \cos 函數的微分公式, 得

$$\begin{aligned}h'(x) &= \frac{x \frac{d}{dx}[\cos x] - \cos x \frac{d}{dx}[x]}{x^2} \\ &= \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}\end{aligned}$$

(g) 這是一個對數合成函數, 故根據連鎖規則, 對數函數, \sec 函數, 以及 \tan 函數的微分公式, 並化簡整理, 得

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \frac{d}{dx}[\sec x + \tan x] \\ &= \frac{1}{\sec x + \tan x} (\sec x \tan x + \sec^2 x) \\ &= \frac{\sec x (\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} \\ &= \sec x\end{aligned}$$

例 2. 試求

$$f(x) = 2 \sin x - \cos 2x$$

在 $(0, 2\pi]$ 上的相對極值.

<解> (1) 找臨界數, 亦即, 相對極值候選數. 首先, 根據 \sin 與 \cos 函數的微分公式, 得

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2 \cos x - (-\sin 2x \cdot 2) \\ &= 2 \cos x + 2 \sin 2x\end{aligned}$$

在實數線上恆定義.

故僅有第一類臨界數, 亦即, $f'(x) = 0$ 的 x 值, 此乃相當於解

$$\cos x + \sin 2x = 0$$

經由倍角公式, 亦相當於解

$$\cos x + 2 \sin x \cos x = \cos x(1 + 2 \sin x) = 0$$

因此,

$$\cos x = 0$$

並由此得出在 $(0, 2\pi]$ 內的臨界數

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

或

$$1 + 2 \sin x = 0$$

亦相當於

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

以及在 $(0, 2\pi]$ 內對應的臨界數

$$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

(2) 驗證. 上述求得的四個臨界數將 $(0, 2\pi)$ 分割成五個子區間, 且在每個子區間內一階導函數

$$f'(x) = 2 \cos x(1 + 2 \sin x)$$

的符號如下述及圖示.

$(0, \frac{\pi}{2})$: $f' = (+)(+) = (+)$, 遞增.

$(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6})$: $f' = (-)(+) = (-)$, 遞減.

$(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$: $f' = (-)(-) = (+)$, 遞增.

$(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6})$: $f' = (+)(-) = (-)$, 遞減.

$(\frac{11\pi}{6}, 2\pi)$: $f' = (+)(+) = (+)$, 遞增.

因此, 根據一階導函數檢定法,

$$f(x) = 2 \sin x - \cos 2x$$

在 $x = \frac{\pi}{2}$ 與 $x = \frac{3\pi}{2}$ 有相對最大值

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(\pi) \\ &= 2(1) - (-1) = 3 \end{aligned}$$

與

$$\begin{aligned}f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos(3\pi) \\ &= -2 - (-1) = -1\end{aligned}$$

且在 $x = \frac{7\pi}{6}$ 與 $\frac{11\pi}{6}$ 有相對最小值

$$\begin{aligned}f\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= 2\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

與

$$\begin{aligned}f\left(\frac{11\pi}{6}\right) &= 2\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$