單元 53: 羅必達法則

一. 以一些問題開始. 試問下列的極限為何?

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$

<解> (1) 首先嘗試最基本的代入法, 亦即, 將 x 接近的數或無界的趨勢代入函數內, 經由計算整理後, 若為一實數, 則此實數即為極限; 否則需根據代入後的情況, 進一步處理, 故 (a) 代入 $x=1$, 得

$$\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

乃一未定型 (indeterminate form), 無法直接求出極限, 需進一步處理.

(b) 代入 $x = \infty$, 得

$$\frac{2(\infty)+1}{\infty+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

為另一型式的未定型, 需進一步處理, 才能求出極限.

(c) 代入 $x = 0$, 得

$$\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$

為一未定型, 無法求出極限, 需進一步處理.

(d) 代入 $x = 0$, 得

$$\frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

亦為一未定型, 需進一步處理, 才能求出極限.

(2) 代數法. (a) 因為代入 $x = 1$ 後, 產生的未定型為 $\frac{0}{0}$, 此乃暗示分子分母有公因式 $(x-1)$, 故經由因式分解, 消去公因式後, 再嘗試代入法, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}(x+1) \\ &= 1+1 = 2 \end{aligned}$$

(b) 因爲是求在正無窮遠的極限, 且代入後的未定型爲 $\frac{\infty}{\infty}$, 此乃暗示分子分母均無界地遞增, 一個方式是同除無界遞增的 x 後, 再經由整理, 並嘗試以代入法觀察分子分母的變化, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1)/x}{(x+1)/x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \\
&= \frac{2+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{2+0}{1+0} = 2
\end{aligned}$$

(c) 與 (d) 因爲 $\sin x$ 與 e^{3x} 均不是代數函數, 故無法以代數法求解, 亦即, 無法以上述的因式分解或同除無界遞增的 x 等代數方法, 先進一步處理, 再嘗試以代入法求極限. 一個處理的方式是採用圖型法或數值法, 如課本所列的方式求極限, 但不夠嚴密. 另一個功能強大且嚴密的處理未定型極限的方法爲下述的羅必達法則.

二. 羅必達法則 (L'Hôpital's Rule)

令 c 爲開區間 (a,b) 內的一點, 且函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在開區間 (a,b) 內, 除 c 點外, 均可微. 若分式

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

在代入 $x = c$ 後, 得標準未定型

$$\frac{0}{0}$$

或

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

時, 則

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

當右邊的極限存在或等於 $\pm\infty$ 時.

註 1. 若在 $c = \pm\infty$ 時, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 亦形成未定型, 則羅必達法則也成立, 亦即,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

註 2. 只有在標準未定型時, 才可使用羅必達法則.

註 3. 羅必達法則不是萬靈丹, 亦即, 在有些未定型的情況下, 不發生效用, 如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

而需以基本的代數法求極限, 詳見例 3.

再回到開始的問題. 以代入法均得標準的未定型, 符合羅比達法則的條件, 故 (a) 根據羅必達法則, 將分子分母微分後, 再以代入法, 得

$$\text{原式} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{1} = \frac{2(1)}{1} = 2$$

與代數法的結果一致.

(b) 根據羅必達法則, 將分子分母微分後, 並由常數的極限就是常數本身的極限法則, 得

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1} = 2$$

亦與代數法的結果一致.

(c) 根據羅必達法則, 將分子與分母同微分後, 並以代入法, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}\\ &= \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

一個前面代數法無法求得的極限.

(d) 根據羅必達法則, 將分子與分母同微分後, 並以代入法, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x} &= \lim_{x\to0}\frac{(e^{3x}-1)'}{(x)'}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{3e^{3x}}{1}\\ &= \frac{3e^0}{1}=\frac{3}{1}=3\end{aligned}$$

一個前面代數法無法求得的極限.

例 1. 試求下列各項極限.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^2e^x$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2\ln x}{e^x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{e^x-1}{\ln x}$

<解> (a) 代入 $x=0$, 得

$$\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$$

乃一標準未定型, 故根據羅必達法則, 將分子分母微分後, 並由代入法, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x} &= \lim_{x\to0}\frac{4\cos 4x}{1}\\ &= \frac{4\cos 0}{1}=\frac{4}{1}=4\end{aligned}$$

(b) 代入 $x=\infty$, 得

$$\frac{e^\infty}{e^\infty+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

一個標準未定型, 故根據羅必達法則, 將分子與分母同時微分後, 並經由化簡整理, 以及代入法, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^x}\\ &= \frac{1}{2\cdot e^\infty}=\frac{1}{\infty}=0\end{aligned}$$

(c) 代入 $x = -\infty$, 得

$$(-\infty)^2 e^{-\infty} = \infty \cdot 0$$

另一種型式的未定型, 不是羅必達法則中的標準未定型.
但將上式未定型中的 0 移至分母, 可得

$$\infty \cdot 0 = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

爲一標準未定型, 此乃暗示需將原式的第二項移至分母,
並化簡, 改寫成如下的標準未定型, 再求極限, 亦即,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} x^2 e^x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \end{aligned}$$

接著, 代入 $x = -\infty$, 得

$$\frac{(-\infty)^2}{e^{-(-\infty)}} = \frac{\infty}{e^{\infty}} = \frac{\infty}{\infty}$$

乃一標準未定型.

故根據羅必達則, 將分子分母同微分後, 並由代入法, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \\ &= \frac{2\cdot-\infty}{-e^{-(-\infty)}} = \frac{-\infty}{-\infty} \end{aligned}$$

又是一個標準未定型, 不像前面的例子經由一次羅必達法則後, 即得出極限. 此乃暗示再用一次羅必達法則, 將分子分母同微分後, 並由代入法, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} \\
&= \frac{2}{e^{-(-\infty)}} = \frac{2}{\infty} = 0
\end{aligned}$$

(d) 先示範羅必達法則的錯誤用法: 未檢查代入 $x=1$ 後, 是否爲標準未定型, 即將分子分母同微分, 並經由化簡以及代入法, 得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1} \frac{2\ln x}{e^x} &= \lim_{x\to1} \frac{2\cdot\frac{1}{x}}{e^x} \\
&= \lim_{x\to1} \frac{2}{xe^x} \\
&= \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

雖然得一實數, 卻不是極限, 因爲代入 $x=1$ 後, 得

$$\frac{2\ln 1}{e^1} = \frac{0}{e}$$

並不是標準未定型, 故不得使用羅必達法則, 前述的整個過程都不適當. 事實上, 使用代入法即可得

$$\lim_{x\to1} \frac{2\ln x}{e^x} = \frac{2\ln 1}{e^1} = \frac{0}{e} = 0$$

此乃正確的極限. 此小題乃提醒, 要先以代入法確定條件符合後, 才可使用羅必達法則; 再者, 代入法是一個最基本的求極限的方法, 故先由代入法開始, 是一個經常的嘗試, 接著再根據代入後的結果, 或者得到一實數, 即爲極限; 或者無界遞增或遞減的極限不存在; 或者一個標準的未定型, 再使用羅必達法則或其他方法; 或者一個非標準未定型, 經由轉換成標準未定型後, 再進一步適當的處理.

(e) 先以代入法, 代入 $x = 1^+$, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} \frac{e^x - 1}{\ln x} &= \frac{e^{1^+} - 1}{\ln 1^+} \\ &= \frac{e - 1}{0^+} = \infty \end{aligned}$$

乃一無界遞增的極限不存在. 注意, 代入 $x = 1^+$ 後, 得到的是

$$\frac{e - 1}{0^+}$$

並不是一個未定型, 而是一個可確定的無界遞增的量, 故不可使用羅必達法則.

例 2. 試比較, 當 $x \to \infty$ 時, 三個函數

(a) 多項式函數 $f(x) = x$

(b) 指數函數 $g(x) = e^x$

(c) 對數函數 $h(x) = \ln x$

的成長速率.

<解> 一個比較大小的方式, 是觀察相比後的極限. 首先, 考慮多項式函數與指數函數比值的極限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$$

經由代入 $x = \infty$, 得

$$\frac{\infty}{e^\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

乃一標準未定型, 故根據羅必達法則,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} \\ &= \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

亦即, 當 $x \to \infty$ 時, 分子會遠小於分母, 也就是說,

$$x \ll e^x \tag{1}$$

接著, 考慮對數函數與多項式函數比值的極限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$$

經由代入 $x = \infty$, 得

$$\frac{\ln \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

爲一標準未定型, 故根據羅必達法則,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\ &= \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

並由此導出, 當 $x \to \infty$ 時, 分子遠小於分母, 亦即,

$$\ln x \ll x \tag{2}$$

因此, 合併 (1) 式與 (2) 式, 得

$$\ln x \ll x \ll e^x$$

如圖示.

事實上, 上述的結果可推廣爲

$$\text{對數函數} \ll \text{多項式函數} \ll \text{指數函數}$$

如,

$$\log_7(x+1) \ll \frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - 100 \ll 3^{x-3}$$

或

$$\ln(x^2+1) \ll 3x^{0.1} - 200 \ll e^{\sqrt{x}}$$

例 3. 試說明求

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

時, 羅必達法則不適用, 並以另外的方法求此極限.

<解> (1) 羅必達法則: 代入 $x=\infty$, 得

$$\frac{\infty}{\sqrt{\infty^2+1}}=\frac{\infty}{\infty}$$

爲一標準未定型, 符合羅必達法則的條件. 因此, 根據羅必達法則, 將分子分母同時微分, 並經由整理以及代入法, 得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \\
&= \frac{\sqrt{\infty^2+1}}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}
\end{aligned}$$

又是一個標準未定型. 此乃暗示再用一次羅必達法則, 故經由同時微分分子與分母, 並整理, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{(x)'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x}{1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \text{原式}
\end{aligned}$$

此乃表示繼續使用羅必達法則時, 會無窮循環下去, 無法得出極限.

(2) 代數法: 因爲是求函數在無窮遠的極限, 亦即, 當

$$x \to \pm\infty$$

時的極限, 一個典型的作法是將分子分母同除 x 的最高次方的代數法, 亦即, 同除此例的 x 後, 得

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}$$

接著, 因爲 $x \to \infty$, x 爲正, 故根據

$$x > 0,\ x = \sqrt{x^2}$$

整理, 以及求極限的法則, 由上式得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1
\end{aligned}
$$