單元 54: 數列
(課本 §10.1)

定義. 口語上, 數列 (sequence) $\{a_n\}$ 爲一串有順序的數, 如

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

嚴格上, 數列 $\{a_n\}$ 爲一個由

$$\text{正整數} \to \text{實數}$$

的函數, 其值爲

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

並稱 a_n 爲此數列的一般項 (nth term), 如數列

$$\{a_n = 2n + 1\}$$

乃相當於函數

$$\begin{array}{ccc}
1 & \to & 2(1)+1=3 \\
2 & \to & 2(2)+1=5 \\
3 & \to & 2(3)+1=7 \\
4 & \to & 2(4)+1=9 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
n & \to & 2n+1 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

又數列

$$\left\{b_n = \frac{3}{n+1}\right\}$$

乃相當於函數

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots & \frac{3}{n+1} & \cdots \end{array}$$

問. 一串數列 $\{a_n\}$ 的極限爲何?

答. 以求函數極限的方法計算; 若極限存在, 稱此數列收斂, 否則此數列發散.

例如, 數列

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$$

的極限爲

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

此乃因爲將 n 視爲變數, 由代入法以及函數極限的法則所致, 故收斂. 又數列

$$\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$$

的極限爲

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n}}{\frac{n+1}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{1+0}=2\end{aligned}$$

此乃因爲視 n 爲變數後, 原式乃相當於一有理函數在無窮遠的極限, 因而將分子分母同除變數的最高次方 n, 並化簡以及根據函數極限的法則所致, 故收斂.

例 1. 試求下列各數列的極限.

(a) $\{3+(-1)^n\}$

(b) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right\}$

(c) $\left\{\dfrac{e^n}{n}\right\}$

(d) $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$

(e) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n!}\right\}$

<解> (a) 列舉此數列, 得

$$\begin{array}{r}
3+(-1)^1=3-1=2 \\
3+(-1)^2=3+1=4 \\
3+(-1)^3=3-1=2 \\
3+(-1)^4=3+1=4 \\
2 \\
4 \\
\vdots
\end{array}$$

亦即, 此數列的奇數項均爲 2, 且偶數項均爲 4. 故由此可導出此數列乃上下震盪, 無法收斂到一固定的實數, 因而極限不存在. 因此, 此數列發散.

(b) 首先, 觀察分子的變化. 當 n 爲奇數時, 分子爲

$$1+(-1)^{\text{奇數}}=1-1=0$$

當 n 爲偶數時, 分子爲

$$1+(-1)^{\text{偶數}}=1+1=2$$

乃在 0 與 2 交替震盪, 但由於分母是無界地遞增, 此兩個固定的常數除以愈來愈大的實數後, 會一致地愈來愈靠

近 0, 而抵消此種震盪的現象, 故得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{0\ 或\ 2}{n}\\ &= \frac{0\ 或\ 2}{\infty}=0\end{aligned}$$

且此數列收斂.

(c) 首先, 根據求函數極限的經驗, 將 $n=\infty$ 代入, 得

$$\frac{e^{\infty}}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

乃一標準未定型. 故根據羅必達法則, 視 n 爲變數, 將分子與分母同對 n 微分後, 並由代入法, 得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{1}\\ &= \frac{e^{\infty}}{1}=\infty\end{aligned}$$

故此數列發散.

或根據已知的結論, 當 $n\to\infty$ 時,

$$n \ll e^n$$

得分子遠大於分母, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n}=\infty$$

爲一發散的數列.

(d) 代入 $n = \infty$, 得

$$\frac{\ln \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

一個標準未定型, 故根據羅必達法則, 將分子分母同對 n 微分後, 並經由化簡整理, 以及代入法, 得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

故此數列收斂.

或根據已知的結論, 當 $n \to \infty$ 時,

$$\ln n \ll n$$

得分子遠小於分母, 故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

乃一收斂的數列.

(e) 首先, 觀察分子的變化, 得分子

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & n \text{ 爲奇數,} \\ 1, & n \text{ 爲偶數.} \end{cases}$$

接著, 觀察分母的變化, 當 $n \to \infty$ 時, 分母

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \to \infty$$

故, 如同 (b), 雖然分子在 -1 與 1 交替震盪, 但分母是無界地遞增, 而抵銷此種震盪的現象, 得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{-1 \text{ 或 } 1}{n!} \\ &= \frac{-1 \text{ 或 } 1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

為一收斂的數列.

問. 下列四個數列

(a) $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$

(b) $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \ldots\right\}$

(c) $\{c_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{62}, \ldots\right\}$

(d) $\{d_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, \ldots\right\}$

的極限分別爲何?

<解> 因爲極限是求, 當 $n \to \infty$ 時, 一般項 (nth term)

$$a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n$$

的變化情形, 若只看上述四個數列的前三項或有限項, 它們均相等, 因此無法判斷. 所以, 必須找出一般項的型式, 才可用一般求函數極限的方法計算出數列的極限, 故這也是一種型式辨識 (pattern recognition) 的問題.

因爲型式辨識可能不只一種, 故一種可能爲

(a) 數列 $\{a_n\}$ 的一般項

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

因爲前四項分別爲

$$a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$
$$a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$
$$a_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$
$$a_4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

符合給定的數列

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots\right\}$$

因此, 根據求函數極限的經驗,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

(b) 數列 $\{b_n\}$ 的一般項

$$b_n = \frac{6}{(n+1)(n^2-n+6)}$$

因爲前四項分別爲

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{6}{(2)(1-1+6)} = \frac{6}{(2)(6)} = \frac{1}{2} \\
b_2 &= \frac{6}{(3)(4-2+6)} = \frac{6}{(3)(8)} = \frac{1}{4} \\
b_3 &= \frac{6}{(4)(9-3+6)} = \frac{6}{(4)(12)} = \frac{1}{8} \\
b_4 &= \frac{6}{(5)(16-4+6)} = \frac{6}{(5)(18)} = \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

符合給定的數列

$$\{b_n\} = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{15},\ \ldots\right\}$$

因此, 根據求極限的法則, 代入 $n=\infty$, 得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{(n+1)(n^2-n+6)} \\ &= \frac{6}{\infty} = 0\end{aligned}$$

(c) 數列 $\{c_n\}$ 的一般項

$$c_n = \frac{n^2-3n+3}{9n^2-25n+18}$$

因為前四項分別為

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1-3+3}{9-25+18} = \frac{1}{2} \\ c_2 &= \frac{4-6+3}{36-50+18} = \frac{1}{4} \\ c_3 &= \frac{9-9+3}{81-75+18} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \\ c_4 &= \frac{16-12+3}{144-100+18} = \frac{7}{62} \end{aligned}$$

符合給定的數列

$$\{c_n\} = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{7}{62},\ \ldots\right\}$$

因此, 將分子分母同除以 n^2, 並經由化簡整理, 以及代入

法, 得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+3}{9n^2-25n+18} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}{9-\frac{25}{n}+\frac{18}{n^2}} \\
&= \frac{1-0+0}{9-0+0} = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

(d) 數列 $\{d_n\}$ 的一般項

$$d_n = \frac{-n(n+1)(n-4)}{6(n^2+3n-2)}$$

因爲前四項分別爲

$$d_1 = \frac{-(1)(2)(-3)}{(6)(2)} = \frac{1}{2}$$
$$d_2 = \frac{-(2)(3)(-2)}{(6)(8)} = \frac{1}{4}$$
$$d_3 = \frac{-(3)(4)(-1)}{(6)(16)} = \frac{1}{8}$$
$$d_4 = \frac{-(4)(5)(0)}{(6)(26)} = 0$$

符合給定的數列

$$\{d_n\} = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ 0,\ \ldots\right\}$$

因此, 將分子分母同除以 n^2, 並經由化簡整理, 以及代入法, 得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{-n(n+1)(n-4)}{6(n^2+3n-2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-n\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)}{6\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)} \\
&= \frac{-(\infty)(1+0)(1-0)}{(6)(1+0-0)} \\
&= \frac{-\infty}{6} = -\infty
\end{aligned}$$

例 2. 試求數列

$$\left\{-1,\ \frac{3}{2},\ -\frac{7}{6},\ \frac{15}{24},\ -\frac{31}{120},\ \ldots\right\}$$

的一般項 a_n, 以及此數列的極限.

<解> (a) 求一般項. 同上述的問題, 基本上, 求一般項乃是一個型式辨識的問題, 故需根據經驗, 由已知的有限項, 辨識出一些規則, 而導出可能的一般項. 一個合理的觀察結論爲

(1) 奇數項均爲負數, 含有 -1, 而偶數項均爲正數, 含有 1, 呈現出由 -1 開始的正負交替現象, 故一般項含有

$$(-1)^n$$

(2) 略去正負號, 分子分別爲

$$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \ldots$$

此乃相當於

$$2^1-1,\ 2^2-1,\ 2^3-1,\ 2^4-1,\ 2^5-1,\ \ldots$$

故略去正負號的一般項分子含有

$$2^n-1$$

(3) 略去正負號, 分母分別爲

$$1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ \ldots$$

根據經驗此乃相當於

$$1!,\ 2!,\ 3!,\ 4!,\ 5!,\ \ldots$$

故略去正負號的一般項分母含有

$$n!$$

因此, 合併上述的結論 (1), (2), 與 (3), 得一般項

$$a_n=(-1)^n\left(\frac{2^n-1}{n!}\right)$$

(b) 求極限. 首先, 嘗試代入法, 當 $n \to \infty$ 時, 分子

$$2^n - 1 \to 2^\infty - 1 = \infty$$

同時分母

$$n! \to \infty$$

而得出

$$\frac{\infty}{\infty}$$

的標準未定型, 但不適宜採用羅必達法則, 因爲原一般項還需考慮一個正負交替的符號, 並不符合羅必達法則的先決條件, 再者不易將 $n!$ 對 n 微分. 故一個可行的方法乃是, 直接比較一般項的分子與分母的大小, 如下述. 根據階乘函數的定義, 一般項 a_n 的分母

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

除了前兩項 (或有限項) 外, 均大於分子的主要項

$$2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ 項}}$$

故經由相乘的效應後, 分母會遠大於分子的主要項 , 亦即,

$$2^n - 1 \ll n!$$

而使得比值趨近於 0, 以致消除正負交替的現象, 並得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pm[(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2) - 1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = 0$$

註. 根據上述直接比較的結果以及前一單元根據羅比達法則所導出的結論, 可推廣出

對數函數 $\ll$ 多項式函數 $\ll$ 指數函數 $\ll$ 階乘函數

例如,

$$\ln n \ll n \ll e^n \ll n!$$

或

$$\log_7(n^2+100) \ll n^{0.1} - 1 \ll 1.5^{\sqrt{n}} \ll \frac{n!}{10000}$$

例 3. 令函數

$$f(x) = e^{x/3}$$

且一數列的一般項

$$a_n = f^{(n-1)}(0)$$

試求一般項 a_n 以及此數列的極限.

<解> 一般的作法乃是, 根據此數列的定義, 列舉前面幾項, 並經由辨識, 歸納出規則, 而導出一般項, 如下述.

例如, 當 $n=1$ 時, 在 0 次微分乃相當於不微分, 即爲原函數的認知下,

$$f^{(1-1)}(x) = f^{(0)}(x) = f(x) = e^{x/3}$$

並由此數列的定義以及上式, 得

$$a_1 = f^{(0)}(0) = e^0 = 1$$

當 $n = 2$ 時,

$$f^{(2-1)}(x) = f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x/3}\right] = \frac{1}{3}e^{x/3}$$

並由此數列的定義以及上式, 得

$$a_2 = f^{(1)}(0) = \frac{1}{3}e^0 = \frac{1}{3}$$

當 $n = 3$ 時,

$$\begin{aligned} f^{(3-1)}(x) &= f^{(2)}(x) \\ &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}e^{x/3}\right] \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{x/3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 e^{x/3} \end{aligned}$$

並由此數列的定義以及上式, 得

$$a_3 = f^{(2)}(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 e^0 = \frac{1}{3^2}$$

以此類推, 當 $n = 4$ 時, 得

$$f^{(4-1)}(x) = f^{(3)}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 e^{x/3}$$

以及

$$a_4 = f^{(3)}(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 e^0 = \frac{1}{3^3}$$

故，根據上述的經驗，對於一般的 n，可推導出

$$f^{(n-1)}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)} e^{x/3}$$

以及一般項

$$a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$$

因此，此數列的極限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n-1}} \\ &= \frac{1}{3^{\infty-1}} \\ &= \frac{1}{3^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0\end{aligned}$$

乃一收斂的數列.

例 4. 試計算極限

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

的值.

<解> 先以代入法, 將 $x=\infty$ 代入, 得

$$\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=1^{\infty}$$

乃表示一個任意接近 1 的無窮大次方, 不是 1 自乘無窮多次, 而無法確定其值, 乃另一種型式的未定型, 不是標準未定型, 故不能直接使用羅必達法則. 處理方法如下.

首先, 根據指數函數與對數函數的互逆性, 並以對數律化簡, 得

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \tag{1}$$

接著, 因爲指數函數爲連續函數, 故求原極限時, 只需求指數部分的極限

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \tag{2}$$

再根據 (1) 式, 將此極限代入指數函數內即可.

先嘗試將 $x=\infty$ 代入 (2) 式, 得

$$\begin{aligned}\infty\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\infty}\right) &= \infty\cdot\ln(1+0)\\ &= \infty\cdot\ln 1=\infty\cdot 0\end{aligned}$$

乃另一種型式的未定型，不是標準未定型，但將上式未定型中的 ∞ 移至分母，可得

$$\infty \cdot 0 = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

為一標準未定型，故將 ∞ 的對應項移至分母，並根據羅必達法則，將分子分母同時微分後，並經由化簡整理，以及代入法，得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1
\end{aligned}$$

因此，將上述求得的極限代入指數函數內，得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$$

註 1. 將非標準未定型

$$\infty \cdot 0$$

轉換成標準未定型的另一種嘗試，是將 0 移至分母，得

$$\infty \cdot 0 = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

如前一單元例 1 的 (c) 小題，但針對此一極限，無法根據此種轉換，以羅必達法則求出極限，請自行驗證. 此乃說明，適當的轉換乃是一種經驗的累積，需經由多次的練習，培養出正確的直覺.

註 2. 根據上述的經驗，處理非標準未定型

$$1^{\infty}$$

的典型作法是，先經由取對數的轉換，得

$$\ln 1^{\infty} = \infty \cdot \ln 1 = \infty \cdot 0$$

再由取顛倒數的轉換，得適當的標準未定型

$$\infty \cdot 0 = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

或

$$\infty \cdot 0 = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

接著, 根據羅必達法則計算出上述這個取對數以及顛倒數轉換後的極限. 最後, 千萬要記得, 一定要將上述所計算出的極限代入指數函數內, 才是原式的極限.

應用. 連續複利. 若存款為 P, 年利率為 r, 且一年計算 n 次複利, 則 t 年後的結餘

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

若計算複利的次數 $n \to \infty$, 意即隨時計算複利, 則得 t 年後連續複利的結餘

$$A = \lim_{n\to\infty} P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \tag{3}$$

接著, 經由適當的改寫, 指數律, 並令

$$x = \frac{n}{r}$$

以及

$$n \to \infty$$

乃相當於

$$x = \frac{n}{r} \to \infty$$

且由連續函數的極限性質, 例3 的結論, 由 (3) 式得

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} P\left[\left(1+\frac{1}{n/r}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= P\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{rt} \\ &= Pe^{rt} \end{aligned}$$

一個已知, 但過去未證明的 t 年後連續複利的結餘公式.