單元 55: 級數與收斂
(課本 §10.2)

以一個熟悉的例子開始, 將 $\frac{1}{3}$ 表成小數, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0.3333\cdots \\ &= 0.3+0.03+0.003+0.0003+\cdots \\ &= \frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}\end{aligned}$$

因爲是一個無窮多項的和, 故稱作無窮級數 (infinite series), 其中的符號 $\sum$ 稱作累加符號 (sigma notation), 可簡潔地表示一個無窮項數的和.

問. 何謂無窮級數? 如何求無窮級數的值?

定義. 無窮級數乃一個無窮多項的和

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots$$

可採用累加符號

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

簡潔地表示.

令第一項的和

$$S_1 \stackrel{\text{def}}{=} a_1$$

前兩項的和

$$S_2 \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_2$$

前三項的和

$$S_3 \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + a_3$$

以及類推的前 n 項的和

$$S_n \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

稱作第 n 個部分和 (nth partial sum, 或 n 項和), 由此可得一數列

$$\{S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots\} = \{S_n\}$$

並定義

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

亦即, 無窮級數的值等於此無窮級數 n 項和的極限. 若此數列 $\{S_n\}$ 的極限存在, 則稱無窮級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂; 否則, 稱無窮級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散.

註. 無窮級數中的足標 (index) n, 不一定要像定義, 從 1 開始, 如

$$a_{-1}+a_0+a_1+a_2+\cdots=\sum_{n=-1}^{\infty}a_n$$

與

$$b_2+b_3+b_4+b_5+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}b_n$$

亦稱作無窮級數.

例 1. 試判斷下列各級數爲收斂或發散.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}1$

<解> 首先, 需要求 n 項和 S_n, 根據定義並化簡, 得

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad (1)\end{aligned}$$

接著, 根據一個常用的公式

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

並經由化簡, 以及 (1) 式, 得 n 項和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

最後, 根據無窮級數的值的定義, 以及上述求得的前 n 項和 S_n, 無窮級數

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \lim_{n\to\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\infty} = 1 \end{aligned}$$

收斂.

(b) 首先, 前 n 項和

$$S_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ 項}} = n$$

故, 無窮級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

發散.

性質. 設二無窮級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$$

與

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

均收斂, 則

(1) 常數乘積的無窮級數等於無窮級數的常數乘積,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cA$$

亦即, 可將乘積常數由累加符號內提出.

(2) 和或差的無窮級數等於無窮級數的和或差,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \pm B$$

亦即, 可先求出各個無窮級數的值, 再做對應的和或差.

與有限項和一樣的性質.

例 2. 試求下列各項無窮級數的值.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

<解> (a) 根據性質 1, 將乘積常數 -1 由累加符號內提出, 並由例 1 (a) 小題的結果, 得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2^n} &= (-1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= (-1)(1) = -1\end{aligned}$$

(b) 首先, 由性質 2, 差的無窮級數等於無窮級數的差, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$$

接著, 將第二個級數的一般項改寫爲

$$\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$$

並根據性質 1, 提出乘積常數, 以及例 1 (a) 小題的結果, 由上式得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\\ &= 1-\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

給定一無窮級數, 通常會考慮下列二問題,

(1) 此級數收斂或發散?

(2) 若收斂, 此級數的值爲何?

一. 先探討一個判斷發散的方法.

判斷發散的一般項檢定法: 給定一級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 若一般項的極限

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$$

則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散.

註. 當一般項的極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

時, 無法下結論, 亦即, 此級數可能收斂也可能發散, 需要進一步探討, 切記, 勿在沒有其他充分的理由下, 判斷此級數爲收斂或發散, 這是初學者常犯的一個錯誤. 因此, 只有在一般項的極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

時, 才可判斷級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散.

例 3. 試判斷下列各級數爲收斂或發散.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n!+1}$

<解> (a) 先嘗試判斷發散的一般項檢定法. 根據計算在無窮遠極限的典型作法, 將分子分母同除 n, 並經由化簡整理以及代入法, 得一般項的極限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2}\neq 0\end{aligned}$$

故發散.

(b) 首先計算一般項的極限, 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{\infty}=0$$

無法下結論. 但由例 1 的 (a) 小題知, 前 n 項和 S_n 的極限

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$$

故, 根據級數的值等於前 n 項和的極限以及收斂發散的定義, 級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

收斂.

(c) 將分子分母同除 $n!$, 並經由化簡整理以及代入法, 得一般項的極限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2n!+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n!}}\\ &= \frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}\neq 0\end{aligned}$$

故, 此級數發散.

二. 不同類型的級數, 有不同的求值方法, 如下述.

首先探討等比級數. 型如

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots$$

的級數, 稱作公比爲 r, 首項爲 a 的等比級數.

當公比 $r\neq 1$ 時, 經由化簡整理以及例 1 (a) 小題的常用公式, 此等比級數的前 n 項和

$$\begin{aligned}S_n &= a+ar+\cdots+ar^{n-1}\\ &= a(1+r+\cdots+r^{n-1})\\ &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (2)\end{aligned}$$

再根據另一個常用的結論, 當 $|r| < 1$ 時,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

且當 $|r| > 1$ 時,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \pm\infty$$

亦即, 無界地遞增或無界地震盪地不存在, 以及計算極限的法則, 當公比的絕對值 $|r| < 1$ 時, 由 (2) 式, 前 n 項和的極限

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\
&= \frac{a}{1-r}\left(1 - \lim_{n\to\infty} r^n\right) \\
&= \frac{a}{1-r}(1-0) \\
&= \frac{a}{1-r}
\end{aligned} \tag{3}$$

同理, 當公比的絕對值 $|r| > 1$ 時, 前 n 項和的極限

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \frac{a}{1-r}\left(1 - \lim_{n\to\infty} r^n\right) \\
&= \frac{a}{1-r}(1-\pm\infty) \\
&= \pm\infty
\end{aligned} \tag{4}$$

亦即, 無界地遞增, 或遞減, 或無界地震盪地不存在.

當公比 $r=1$ 時, 此等比級數的前 n 項和

$$S_n = \underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{ 項}} = na$$

故, 前 n 項和的極限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = a\cdot\infty = \pm\infty \tag{5}$$

亦即, 無界地遞增或遞減地不存在.

最後, 當公比 $r=-1$ 時, 此等比級數的前 n 項和

$$\begin{aligned} S_n &= a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a \\ &= \begin{cases} a, & n\text{ 爲奇數} \\ 0, & n\text{ 爲偶數} \end{cases} \end{aligned}$$

故, 前 n 項和的極限

$$\lim_{n\to\infty} S_n \text{ 在 } a \text{ 與 } 0 \text{ 交替震盪地不存在} \tag{6}$$

因此, 合併 (3)-(6) 式, 並根據級數的值以及收斂發散的定義, 等比級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & \text{若 } |r|<1, \\ \text{發散}, & \text{若 } |r|\ge 1. \end{cases}$$

註. 當公比的絕對值 $|r| < 1$ 時, 上式等比級數的值的公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

是由 $n = 0$ 開始的; 若 n 不是由 0 開始, 則需做適當地調整, 或辨識出首項, 根據過去高中學過的公式

$$\sum_{n=\text{某整數}}^{\infty} ar^n = \frac{\text{首項}}{1-r}$$

求值.

例 4. 試判斷下列各級數爲收斂或發散.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n}$

<解> (a) 根據辨識, 原式為一等比級數, 且由 $n = 0$ 開始, 以及首項為 3, 公比的絕對值

$$|r| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

故根據等比級數的公式, 並經由化簡整理, 得等比級數

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{3}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{3}{3/2} = 2\end{aligned}$$

收斂.

(b) 經由辨識, 原式為一等比級數, 且公比的絕對值

$$|r| = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2} > 1$$

故根據等比級數的公式, 此等比級數發散.

(c) 首先, 經由辨識, 原式為一等比級數, 且公比

$$r = \frac{1}{3} < 1$$

故此等比級數收斂.

接著, 求此收斂的等比級數的值. 因為此收斂的等比級數是由 $n = 1$ 開始, 不是由 $n = 0$ 開始, 故須先經由加

上 $n = 0$ 所對應的項, 並減去加上的項的調整, 再根據等比級數求值的公式, 以及 $a = 4$, $r = \frac{1}{3}$, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{1}{3^n} - 4 \cdot \frac{1}{3^0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 4 \\
&= \frac{4}{1 - \frac{1}{3}} - 4 \\
&= \frac{4}{2/3} - 4 = 6 - 4 = 2
\end{aligned}$$

或根據上述註解的一般性公式, 代入

$$\text{首項} = \frac{4}{3^1} = \frac{4}{3}$$

以及公比

$$r = \frac{1}{3}$$

後, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n} = \frac{4/3}{1 - 1/3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$$

例 5. 設一球自高度爲 6 的地方落下後, 繼續地往上彈

回與落下, 且每次彈回的高度是前一次落下高度的 $\frac{3}{4}$ 倍, 如圖示. 試問此球上下跳動所經過的距離總和是多少?

<解> 根據圖示, 令 D_1 爲第一次接觸地面時, 所經過的距離, 則

$$D_1 = 6$$

令 D_2 爲第二次接觸地面時, 所經過的距離, 則根據題意, 彈回的高度爲前一次的 $\frac{3}{4}$, 且落下後才接觸地面, 得

$$D_2 = \underbrace{6\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{上}} + \underbrace{6\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{下}} = 12\left(\frac{3}{4}\right)$$

同理, 令 D_3 爲第三次接觸地面時, 所經過的距離, 則

$$D_3 = 6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + 6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 12\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\vdots$$

以此類推, 令 D_n 爲第 n 次接觸地面時, 所經過的距離, 則

$$D_n = 6\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 6\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 12\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\vdots$$

因此, 在此球持續不斷地彈回與落下後, 所經過的距離總和爲

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n = 6 + \sum_{n=2}^{\infty} 12 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \tag{7}$$

其中等號右邊第二項乃是一個

$$\text{首項} = 12 \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1} = 12 \left(\frac{3}{4}\right) = 9$$

且公比

$$r = \frac{3}{4} < 1$$

的等比級數, 故收斂, 且根據等比級數的值的公式, 由 (7) 式, 得

$$\begin{aligned} \text{距離總和} &= 6 + \frac{9}{1 - 3/4} \\ &= 6 + 9 \cdot 4 = 42 \end{aligned}$$

或經由足標變換以及從 $n = 0$ 開始的公式, 經由足標調整後, 並代入

$$a = 12$$

以及公比

$$r = \frac{3}{4}$$

由 (7) 式得

$$
\begin{aligned}
\text{距離總和} &= 6+\sum_{n=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^n \\
&= 6+\sum_{n=0}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^n - 12\left(\frac{3}{4}\right)^0 \\
&= 6+\frac{12}{1-3/4}-12 \\
&= 6+48-12=42
\end{aligned}
$$