

## 單元 56: $p$ -級數與比值檢定法 (課本 §10.3)

### 一. $p$ -級數

定義. 令  $p > 0$ , 型如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

的級數, 稱作  $p$ -級數.

當  $p = 1$  時, 得一特例,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

稱作調和級數 (harmonic series).

問. 如何判斷  $p$ -級數為收斂或發散?

$p$ -級數檢定法: 給定一  $p$ -級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

則

(1) 此  $p$ -級數收斂, 若  $p > 1$ .

(2) 此  $p$ -級數發散, 若  $0 < p \leq 1$ .

例 1. 試判斷下列各級數為收斂或發散.

(a) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(b) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.9}}$$

(c) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}}$$

(d) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n+1}$$

(e) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

<解> 判斷級數為收斂或發散的第一步，是要辨識出此級數是哪一類的級數，如等比級數，或  $p$ -級數，或是一般級數，再根據對應的檢定法判斷，如為等比級數，則需檢定公比的絕對值  $|r|$  是否小於 1，若為  $p$ -級數，則需檢定  $p$  值是否大於 1，而判斷為收斂或發散；如為一般級數，目前只能根據一般項的極限不為 0 時，而判斷為發散，或根據定義，以前  $n$  項和  $S_n$  的極限是否存在，判斷為收斂或發散。既然需辨識出何種級數，又需根據對應的檢定法，故多加練習以培養出直覺，是必要的學習過程。

(a) 因為一般項可改寫為

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$$

故經由辨識，原式為

$$p = \frac{1}{2} \leq 1$$

的  $p$ -級數。因此，根據  $p$ -級數檢定法， $p$ -級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

發散。

(b) 明顯地, 原式為

$$p = 0.9 \leq 1$$

的  $p$ -級數, 故根據  $p$ -級數檢定法,  $p$ -級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.9}}$$

發散.

(c) 顯然地, 原式為

$$p = \pi > 1$$

的  $p$ -級數, 故根據  $p$ -級數檢定法,  $p$ -級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}}$$

收斂.

註. (a) 小題的級數的一般項極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

但級數發散; 又 (c) 小題的級數的一般項極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\pi}} = 0$$

但級數卻收斂；雖然一般項的極限均為 0，卻得出兩種全然不同的結果。此乃說明，一般項的極限等於 0 時，並不是一個充分的理由，可判斷出級數為收斂或發散，而無法做出結論。再次強調，一般項檢定法，只在一般項的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

時，才能做出發散的結論。

(d) 經由辨識，原式既不是等比級數，也不是  $p$ -級數，而是一般類級數，故先嘗試一般項檢定法，經由分子分母同除以  $n$  的典型作法，以及代入法，得一般項的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{5n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{5+1/n} = \frac{3}{5} \neq 0$$

故根據一般項檢定法，一般類級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n+1}$$

發散。

(e) 經由辨識，原式為一等比級數，且公比的絕對值

$$|r| = \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} < 1$$

故根據等比級數檢定法，等比級數收斂，且代入

$$\text{首項} = 5 \left( -\frac{2}{3} \right) = -\frac{10}{3}$$

以及公比

$$r = -\frac{2}{3}$$

得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(-\frac{2}{3}\right)^n &= \frac{-10/3}{1 - (-2/3)} \\ &= \left(-\frac{10}{3}\right) \left(\frac{3}{5}\right) = -2\end{aligned}$$

(f) 顯然地, 原式為

$$p = 1 \leq 1$$

的  $p$ -級數, 故根據  $p$ -級數檢定法,  $p$ -級數, 亦稱作調和級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

發散.

註. 若採用一般項檢定法, 調和級數的一般項極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

無法得出任何結論; 此發散的結論乃是根據  $p$ -級數檢定法判斷出的.

再次提醒，一般項檢定法是用來判斷發散的，且當一般項的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

時，無法下結論。

## 二. 比值檢定法

當一般類級數的一般項含有指數函數或階乘函數時，一個判斷收斂或發散的有效方法為下述的比值檢定法 (ratio test)。

比值檢定法：令  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  為一個不含有 0 項的無窮級數，則

**(1)** 此級數收斂，若後項與前項比值的絕對值的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

**(2)** 此級數發散，若後項與前項比值的絕對值的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

(3) 無法下結論，若後項與前項比值的絕對值的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

例 2. 試判斷下列各級數為收斂或發散.

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^5}$

(d)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$

<解> (a) 經由辨識，原式不是等比級數，也不是  $p$ -級數，而是含有階乘函數及指數函數的一般類級數，故可嘗試



比值檢定法，雖然一般項檢定法也是一個合理的嘗試，但根據前述的一個各類函數大小關係

對數函數  $\ll$  多項式函數  $\ll$  指數函數  $\ll$  階乘函數

在分子是無界遞增與無界遞減地震盪，而分母遠大於分子的情況下，得一般項的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pm 2^n}{n!} = 0$$

乃無法判斷。

接著嘗試比值檢定法。根據除以一數等於乘上此數的顛倒數，並經由化簡整理，以及代入法，得後項比前項的絕對值的極限

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(-2)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \end{aligned}$$

故，根據比值檢定法，級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$$

收斂。

(b) 因為原式不是等比級數，也不是  $p$ -級數，而是含有指數函數的一般類級數，故根據比值檢定法，並經由化簡整理，以及代入法，得後項比前項的絕對值的極限

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1+0)^2 \\ &= \frac{1}{2} < 1\end{aligned}$$

並由此導出級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

收斂。

註．因為一般項的分子為一多項式，遠小於分母的指數函數，得一般項的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

故無法根據一般項檢定法判斷。

(c) 因為原式是一個含指數函數的一般類級數，故根據前述的經驗，一個合理的嘗試是比值檢定法。經由化簡整理，

分子分母同除以  $n$  的典型作法, 以及代入法, 得後項比前項的絕對值的極限

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1}}{(n+1)^5} \cdot \frac{n^5}{3^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left( \frac{n}{n+1} \right)^5 \\ &= 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+1/n} \right)^5 \\ &= 3 \left( \frac{1}{1+0} \right)^5 \\ &= 3 > 1\end{aligned}$$

故, 根據比值檢定法, 級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^5}$$

發散.

註. 亦可採用一般項檢定法, 並根據分子的指數函數遠大於分母的多項式函數, 得一般項的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n^5} = \infty \neq 0$$

故級數發散, 為一較簡單的判斷法. 此乃說明, 判斷級數收斂或發散的方法不是唯一的, 只要合理即可, 但根據經驗累積的直覺, 選擇簡易的檢定法亦是值得重視的.

(d) 經由一般項含有指數函數的辨識, 以及化簡整理, 並根據常數的極限就是常數本身, 得後項比前項的絕對值的極限

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} e^{-(n+1)}}{(-1)^n e^{-n}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{e^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \\ &= \frac{1}{e} < 1\end{aligned}$$

因此, 根據比值檢定法, 級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$$

收斂.

註. 經由改寫, 得

$$\text{原式} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-1}{e} \right)^n$$

乃一等比級數, 且公比的絕對值

$$|r| = \left| \frac{-1}{e} \right| = \frac{1}{e} < 1$$

故級數收斂，且代入

$$\text{首項} = \left(\frac{-1}{e}\right)^0 = 1$$

以及公比

$$r = \frac{-1}{e}$$

後，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{-1}{e}} = \frac{e}{e + 1}$$

此乃另一種判斷法，不但簡易，更可求出此級數的值。

### 三. 級數檢定法摘要

根據前述的探討，共四種級數檢定法，分別為

#### (1) 一般項檢定法，檢定一般類級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

無法判斷收斂；當一般項極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

時，級數發散；當一般項極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

時，無法判斷。

(2) 等比級數檢定法，檢定等比級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

當公比的絕對值

$$|r| < 1$$

時，級數收斂，且級數的值

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \text{ 或 } \frac{\text{首項}}{1-\text{公比}}$$

當公比的絕對值

$$|r| \geq 1$$

時，級數發散；一定可判斷出等比級數為收斂或發散。

(3)  $p$ -級數檢定法，檢定  $p$ -級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

當

$$p > 1$$

時, 級數收斂; 當

$$0 < p \leq 1$$

時, 級數發散; 一定可判斷出  $p$ -級數為收斂或發散, 但沒有簡單的求值公式.

#### (4) 比值檢定法, 檢定一般類級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

特別是一般項含有指數函數或階乘函數時, 當後項比前項的絕對值的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

時, 級數收斂; 當後項比前項的絕對值的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

時, 級數發散; 當後項比前項的絕對值的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

時，無法判斷。

註．至目前為止，只有等比級數收斂時，才有求值的公式。

例 3．試判斷下列各級數為收斂或發散。

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3^n} \right)$$

$$(e) \sum_{n=2}^{\infty} \ln n$$



$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} n(0.7)^n$$

<解> 判斷級數為收斂或發散，必要時，首先須經由改寫而辨識出是哪一類型的級數，再根據對應的檢定法，以及級數的特徵，選擇上述摘要中適當的檢定法，予以判斷。

(a) 經由改寫，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

乃一等比級數，且公比的絕對值

$$|r| = \frac{1}{4} < 1$$

故級數收斂，且代入

$$\text{首項} = \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$$

以及公比

$$r = \frac{1}{4}$$

後，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

(b) 明顯地, 原式為

$$p = 4 > 1$$

的  $p$ -級數, 故根據  $p$ -級數檢定法,  $p$ -級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

收斂.

註. (a) 小題與 (b) 小題的差異僅在於對調 4 與  $n$  的位置, 卻得出兩個完全不同的級數, 故正確地辨識出級數的類型, 並採用適當的檢定法, 是格外地關鍵與重要.

(c) 將常數 5 由累加符號內提出, 得

$$\text{原式} = 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

乃一常數乘上一個級數.

接著, 可辨識出上式等號右邊的第二項為

$$p = 1 \leq 1$$

的  $p$ -級數, 故根據  $p$ -級數檢定法, 此  $p$ -級數發散, 乃無界地遞增, 由此導出乘上常數 5 以後的級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$$

即原式，依然是無界地遞增，而發散。

註 1. (c) 小題乃說明，可透過級數的常數乘積性質，將原級數改寫成可辨識的級數後，再根據適當的檢定法判斷。同理，亦可經由級數的和或差的性質，先行改寫，再判斷，如下述的 (d) 小題。

註 2. 若 (b) 與 (c) 小題採用比值檢定法時，經由化簡整理，以及在無窮遠極限的典型作法，得後項比前項的絕對值極限

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+1)^4} \cdot \frac{n^4}{1} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^4 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+1/n} \right)^4 \\ &= 1 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5}{n+1} \cdot \frac{n}{5} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} = 1 \end{aligned}$$

均無法判斷，乃比值檢定法失效的情況。

同理，若採用一般項檢定法，得一般項的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} = 0$$

以及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0$$

均為 0，亦無法判斷。

切記，勿採用上述兩種無法判斷的方式做出任何結論，即使結論正確，但邏輯推理錯誤，依然不對，不予計分。

(d) 首先，根據級數的和或差的性質，得

$$\text{原式} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

其中等號右邊第一項為

$$p = 2 > 1$$

的  $p$ -級數，故根據  $p$ -級數檢定法，收斂，乃一實數；又第二項為公比的絕對值

$$|r| = \frac{1}{3} < 1$$

的等比級數，根據等比級數檢定法，亦收斂到一實數。因此，原式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3^n} \right)$$

為二個均收斂到實數的級數的差，相減後依然是一實數，而收斂。

(e) 因為原式不是等比級數，亦不是  $p$ -級數，乃不含指數函數與階乘函數的一般類級數，且明顯地，一般項的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty \neq 0$$

故根據一般項檢定法，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$$

發散。

(f) 因為原式的一般項含有指數函數，故經由化簡整理，以及代入法，得後項比前項的絕對值極限

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(0.7)^{n+1}}{n(0.7)^n} \right| \\ &= 0.7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= 0.7 < 1 \end{aligned}$$

且根據比值檢定法，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(0.7)^n$$

收斂。

註．若採用一般項檢定法，經由改寫，以及分母乃一底數大於 1 的指數函數，遠大於分子的多項式，得一般項極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(0.7)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\left(\frac{10}{7}\right)^n} = 0$$

無法下結論．再次提醒，勿根據一般項極限為 0 的結論，做出任何判斷，而需改用其它適用的檢定法作判斷。