

## 單元 58: 泰勒多項式

### (課本 §10.5)

一. 以一個問題開始, 如何估計  $e^{-x}$ ?

因為

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < \infty$$

故經由代入  $-x$  的合成運算, 以及化簡整理, 得

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

且定義域

$$D = (-\infty, \infty)$$

但是因為此冪級數是一無窮項的和, 故在實務上是不可行的; 一個可行的方法為, 取至  $x^n$  的前面有限項的和

$$S_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

稱作以  $c = 0$  為中心的  $n$  階泰勒多項式 ( $n$ th-degree Taylor polynomial), 估計  $e^{-x}$ .

註. 一個可由圖表得到的明顯現象為, 當  $x$  愈接近中心點  $c = 0$ , 以及階數  $n$  愈大時, 此種估計愈準確. 此現象可由下述的定理予以準確地說明與驗證.

泰勒餘項定理 (Taylor's Theorem with Remainder). 若  $I$  為某一含  $c$  的區間, 且對於所有  $I$  中的  $x$ , 函數  $f(x)$  可被微分至  $(n + 1)$  次, 則對於所有  $I$  中的  $x$ ,

$$f(x) = S_n(x) + R_n$$

其中

$$S_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

稱作以  $c$  為中心的泰勒多項式, 且

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}$$

稱作  $n$  階餘項, 其中  $z$  為某一介於  $x$  與  $c$  之間的未知點, 如圖示, 也就是說, 函數  $f(x)$  可表示成  $n$  階泰勒多項式  $S_n(x)$  與  $n$  階餘項  $R_n$  的和.

註.  $R_n$  可視為以  $n$  階泰勒多項式  $S_n(x)$  估計  $f(x)$  的  $n$  階誤差, 它的值無法確定, 因為其中的  $z$  值無法確定, 但可根據  $f^{(n+1)}(x)$  在  $x$  與  $c$  所構成的區間內的上界估計; 由  $R_n$  的公式可知它的特性為, 當  $x$  愈靠近中心點  $c$ , 以及階數  $n$  愈大時,  $R_n$  會愈小, 以  $S_n(x)$  估計  $f(x)$  會愈準確.

例 1. 試以 4 階泰勒多項式估計  $e^{-0.75}$ , 並求最大的誤差.

<解> 根據泰勒餘項定理以及題意, 需先求出 4 階泰勒多項式  $S_4(x)$  與 4 階餘項  $R_4$ . 因為是估計指數函數在

$$x = -0.75$$

一個靠近 0 的數, 的值, 故可令

$$f(x) = e^x$$

並由以 0 為中心的冪級數表示式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

得 4 階泰勒多項式

$$S_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

以及 4 階餘項

$$R_4 = \frac{f^{(5)}(z)}{5!}x^5$$

其中  $z$  一個介於 0 與  $x$  間的未知點.

接著, 代入  $x = -0.75$ , 得

$$\begin{aligned} e^{-0.75} &\approx S_4(-0.75) \\ &= 1 - 0.75 + \frac{(0.75)^2}{2!} - \frac{(0.75)^3}{3!} \\ &\quad + \frac{(0.75)^4}{4!} \\ &\approx 0.474 \end{aligned}$$

並根據  $n$  階導函數

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

得 4 階餘項

$$\begin{aligned} R_4 &= \frac{e^z}{5!}(-0.75)^5 \\ &= -\frac{e^z}{5!}(0.75)^5, \quad -0.75 < z < 0 \end{aligned}$$

最後, 因為  $e^x$  為一遞增函數, 故當

$$-0.75 < z < 0$$

時,

$$e^z \leq e^0 = 1$$

並由 4 階餘項, 得誤差

$$\begin{aligned} |R_4| &= \frac{e^z}{5!} (0.75)^5 \\ &\leq \frac{e^0}{5!} (0.75)^5 = \frac{1}{120} (0.75)^5 \\ &\approx 0.002 \end{aligned}$$

因此, 最大誤差約為 0.002.

二. 另一個問題, 如何估計定積分?

已知的方法為, 中點法則, 梯形法則, 以及辛普森法則等三個方法.

一個新的方法為冪級數法則 (或稱泰勒多項式法則), 以例說明如下.

例 2. 試以  $e^{-x^2}$  的 8 階泰勒多項式  $S_8(x)$  估計定積分

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

<解> 因為積分的範圍是閉區間  $[0, 1]$ , 一個在 0 附近的範圍, 且被積函數為指數函數  $e^x$  與  $-x^2$  的合成函數, 故考慮以 0 為中心的冪級數表示式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

並代入  $-x^2$ , 以及化簡整理, 得 8 階泰勒多項式

$$S_8(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}$$

接著, 根據泰勒餘項定理, 當  $0 < x < 1$  時,

$$e^{-x^2} \approx S_8(x)$$

並由此導出

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \int_0^1 S_8(x) dx \\ &= \int_0^1 \left( 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} \right) dx \\ &= \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} \right) \Big|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \\ &\approx 0.747 \end{aligned}$$