單元 60: 微分方程式的解
(課本 §C.1)

定義. (1) 一微分方程式 (differential equation) 爲一含有可微函數 y 及其導函數的方程式.

(2) 函數 $y = f(x)$ 稱作一微分方程式的解若且爲若 $f(x)$ 及其對應的導函數滿足原方程式, 意即將 $f(x)$ 與所對應的 $f(x)$ 的導函數代入方程式後, 原式成立.

例如,

$$y' + 2y = 0 \tag{1}$$

爲一個微分方程式, 且

$$y = e^{-2x}$$

是一個解.

爲何如此? 首先, 將 y 對 x 微分, 得

$$y' = -2e^{-2x}$$

並代入 (1) 式, 可導出

$$\begin{aligned} y' + 2y &= -2e^{-2x} + 2(e^{-2x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

原式成立, 故根據定義,

$$y = e^{-2x}$$

爲 (1) 式的解.

同理,

$$y = 2e^{-2x}$$

與

$$y = -3e^{-2x}$$

以及

$$y = 5e^{-2x}$$

也是微分方程式

$$y' + 2y = 0$$

的解, 舉例, 因爲代入

$$y = -3e^{-2x}$$

以及

$$y' = (-3)(-2e^{-2x}) = 6e^{-2x}$$

得

$$\begin{aligned} y' + 2y &= 6e^{-2x} + 2(-3e^{-2x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

原式成立. 請自行驗證其餘的兩個解.

事實上, 對任意的實數 C,

$$y = Ce^{-2x}$$

都是

$$y' + 2y = 0$$

的解. 爲何如此? 因爲

$$y' = Ce^{-2x}(-2) = -2Ce^{-2x}$$

且代入後, 得

$$\begin{aligned} y' + 2y &= -2Ce^{-2x} + 2(Ce^{-2x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

原式成立.

註. 稱此種解

$$y = Ce^{-2x}$$

爲微分方程式

$$y' + 2y = 0$$

的一般解 (general solutions), 乃一解的家族 (a family of solutions).

例 1. 試證

$$y = Ce^x$$

與

$$y = Ce^{-x}$$

均是微分方程式

$$y'' - y = 0$$

的一般解.

<證> 因爲微分方程式內含有二階導函數, 故需將

$$y = Ce^x$$

連續微分兩次, 得

$$y' = Ce^x$$

以及

$$y'' = Ce^x$$

代入後, 可導出

$$y'' - y = Ce^x - Ce^x = 0$$

原式成立. 故

$$y = Ce^x$$

是一個一般解.

同理, 將

$$y = Ce^{-x}$$

連續微分兩次, 得

$$y' = Ce^{-x}(-1) = -Ce^{-x}$$

以及

$$y'' = -Ce^{-x}(-1) = Ce^{-x}$$

接著, 將 y 與 y'' 代入, 得

$$y'' - y = Ce^{-x} - Ce^{-x} = 0$$

原式成立. 因此,

$$y = Ce^{-x}$$

也是一個一般解.

定義. 特殊解 (particular solution) 乃是根據某一給定的初始條件 (initial condition) 將一般解中的未定常數 C 決定後的解.

例如, 考慮微分方程式

$$xy' - 2y = 0$$

則一般解爲

$$y = Cx^2$$

此乃因爲

$$y' = 2Cx$$

且代入後, 得

$$\begin{aligned} xy' - 2y &= x(2Cx) - 2(Cx^2) \\ &= 2Cx^2 - 2Cx^2 = 0 \end{aligned}$$

原式成立. 因此,

$$y = Cx^2$$

確實是一般解, 且當 $C > 0$ 時, 得開口向上的拋物線家族; $C = 0$ 時, 爲 x-軸; $C < 0$ 時, 爲開口向下的拋物線家族, 如圖示, 並稱此種曲線家族 (family of curves) 爲解曲線 (solution curves).

假設欲知過點 $(1, 3)$ 的解, 此乃相當於欲知給定初始條件, 當 $x = 1$ 時, $y = 3$ 的解, 也就是說, 求 C 使得一般解

$$y = Cx^2$$

滿足初始條件

$$x = 1, \ y = 3$$

解法爲, 代入上述初始條件, 得

$$3 = C1^2$$

故

$$C = 3$$

因此, 特殊解爲

$$y = 3x^2$$

例 2. 試驗證

$$y = x \ln x^2 + 2x^{3/2} + Cx$$

是微分方程式

$$y' - \frac{y}{x} = 2 + \sqrt{x}$$

的一般解, 並求滿足初始條件

$$x = 1, \ y = 3$$

的特殊解.

<解> 首先, 將 y 對 x 微分, 並根據微分的乘法規則, 對數函數的微分公式, 以及微分的簡單冪次規則, 得

$$\begin{aligned} y' &= \ln x^2 + x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x + 3x^{1/2} + C \\ &= \ln x^2 + 2 + 3x^{1/2} + C \end{aligned}$$

並由此得

$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{x} &= \ln x^2 + 2 + 3x^{1/2} + C \\ &\qquad -\frac{1}{x}(x \ln x^2 + 2x^{3/2} + Cx) \\ &= \ln x^2 + 2 + 3x^{1/2} + C \\ &\qquad -(\ln x^2 + 2x^{1/2} + C) \\ &= 2 + \sqrt{x} \end{aligned}$$

原式成立. 因此,

$$y = x \ln x^2 + 2x^{3/2} + Cx$$

爲一般解.

接著, 代入初始條件

$$x = 1,\ y = 3$$

並計算整理, 得

$$3 = 1 \ln 1^2 + 2(1)^{3/2} + C = 2 + C$$

故

$$C = 1$$

因此, 特殊解爲

$$y = x \ln x^2 + 2x^{3/2} + x$$

例 3. 設某新產品的最大銷售量爲 10 個百萬單位. 假設銷售量 x 的成長率 (rate of growth) 是與 "最大銷售量和目前銷售量 x 的差" 成正比, 亦即,

$$\frac{dx}{dt} = k(10 - x),\ 0 \le x \le 10$$

此乃因爲 $\frac{dx}{dt}$ 表示變化率 (rate of change), 乃銷售量的成長率; k 爲成正比的比率常數 (proportionality); $(10 - x)$ 乃最大銷售量與目前銷售量 x 的差, 並根據題意列式所致. (a) 試驗證

$$x = 10 - Ce^{-kt}$$

一般解, 其中 C 與 k 爲二未知常數. (b) 若一年後, 銷售 250,000 個單位, 試求此產品的銷售量函數.

<解> (a) 驗證. 首先, 將銷售量 x 對時間 t 微分, 並根據指數函數的微分公式, 得

$$\frac{dx}{dt} = -Ce^{-kt}(-k) = kCe^{-kt}$$

又代入 x, 得

$$k(10 - x) = k(10 - 10 + Ce^{-kt}) = kCe^{-kt}$$

故, 比較上二式, 得

$$\frac{dx}{dt} = k(10 - x)$$

原式成立. 因此,

$$x = 10 - Ce^{-kt}$$

是一般解.

(b) 因爲有兩個未知常數, 故需要兩個初始條件, 首先由一般常識, 得

$$t = 0,\ x = 0$$

另由題意, 得給定的已知條件

$$t = 1,\ x = 0.25$$

接著, 代入第一個初始條件

$$t = 0,\ x = 0$$

得

$$0 = 10 - Ce^{-k(0)} = 10 - C$$

故

$$C = 10$$

因此, 代入由第一個初始條件所得的常數 C, 得較明確的銷售量

$$x = 10 - 10e^{-kt} \tag{2}$$

還有一個未知常數 k 待決定.

再代入第二個初始條件

$$t = 1,\ x = 0.25$$

得

$$0.25 = 10 - 10e^{-k(1)} = 10 - 10e^{-k}$$

經由整理, 得

$$\begin{aligned} e^{-k} &= \frac{1}{10}\left(10 - \frac{1}{4}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{40} = \frac{39}{40} \end{aligned}$$

再將上式兩邊同取 ln, 並根據指數與對數的互逆性, 得

$$-k = \ln\left(\frac{39}{40}\right)$$

故由上式以及對數律,

$$\begin{aligned} k &= -\ln\left(\frac{39}{40}\right) \\ &= \ln\left[\left(\frac{39}{40}\right)^{-1}\right] = \ln\left(\frac{40}{39}\right) \end{aligned}$$

最後, 將 k 代入 (2) 式, 得明確的銷售量

$$x = 10 - 10e^{-\ln\left(\frac{40}{39}\right)t}$$

乃一特殊解.

例 4. 驗證

$$x^2 + y^2 = Cy$$

是微分方程式

$$y'(x^2 - y^2) = 2xy$$

的一般解.

<解> 因爲函數 y 並不是如同前面的情況, 以明確的數學式表示, 而是以一個方程式表示出與自變數 x 的關係, 故不能直接對 y 微分, 而需先解 y, 再求 y', 然而解 y 通常是困難且經常是不可行的; 一個可行的方式是, 利用隱微分 (implicit differentiation), 亦即, 兩邊對 x 微分, 並視 y 爲 x 的函數, 得

$$2x + 2y \cdot y' = Cy'$$

接著, 將含 y' 的各項移至等號左邊, 其餘各項移至等號右邊, 並整理, 得

$$y'(2y - C) = -2x$$

再將兩邊同乘 $-y$, 得

$$y'(Cy - 2y^2) = 2xy$$

最後, 代入

$$x^2 + y^2 = Cy$$

得

$$y'(x^2 + y^2 - 2y^2) = 2xy$$

亦相當於

$$y'(x^2 - y^2) = 2xy$$

原式成立.

因此,

$$x^2 + y^2 = Cy$$

是微分方程式

$$y'(x^2 - y^2) = 2xy$$

的一般解.