單元 61: 變數分離法
(課本 §C.2)

最簡單型式的微分方程式爲

$$y' = f(x)$$

則根據微分與積分的互逆性, 一般解爲

$$y = \int f(x)dx$$

另一類型的微分方程式爲

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

或

$$y' = f(x)g(y)$$

其中 f 與 g 均爲連續函數, 亦即, 等號右邊不像最簡單型式的微分方程式是一個 x 的函數, 而是一個 x 的函數與另一個 y 的函數的乘積, 一個較爲複雜的型式, 並稱作可分離微分方程式 (seperable differential equation).

問. 如何求此類微分方程式的一般解?

答. 可根據所謂的變數分離法 (seperation of variables), 過程為

(1) 將含 y 的部分移至等號左邊, 含 x 的部分移至等號右邊, 得

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

(2) 兩邊對 x 積分, 得

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx$$

(3) 根據微分式 (differential)

$$dy = \frac{dy}{dx}dx$$

得一般解為

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + C$$

簡言之, 由

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\Downarrow \text{ 變數分離}$$

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

$$\Downarrow \text{ 兩邊積分}$$

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

例 1. 試求下列各微分方程式的解.

(a) $y' = \dfrac{x}{y^2+1}$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

(c) $e^y\dfrac{dy}{dx} = 2x$

<解> (a) 經由改寫, 原式相當於

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{y^2+1}$$

等號右邊爲一個 x 的函數與一個 y 的函數的乘積, 乃是一個可分離微分方程式. 故經由變數分離, 得

$$(y^2+1)dy = xdx$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\int (y^2+1)dy = \int xdx$$

再經由積分的冪次規則, 由上式得

$$\frac{1}{3}y^3 + y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

乃一個一般解, 以一個方程式的型式表示滿足微分方程式的 y 與 自變數 x 間的關係, 雖然不是以一個明確且僅含 x 的數學式表示 y; 當然可以嘗試解 y, 但過程經常是冗長且不可行的, 故以此種方程式的型式表示即可.

(b) 經由改寫, 原式乃相當於

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{y}$$

等號右邊是一個 x 的函數與一個 y 的函數的乘積, 乃是一個可分離微分方程式. 故經由變數分離, 得

$$ydy = xdx$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\int ydy = \int xdx$$

再經由積分的冪次規則，可由上式得

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

乃一個以方程式型式表示的一般解，亦可根據個人喜好與習慣，兩邊同乘 2，得一般解

$$y^2 = x^2 + 2C = x^2 + C$$

其中爲方便起見，以一個簡單的符號 C 取代 $2C$，表示任一適當的常數；另針對此一簡單的方程式型式一般解，亦可解 y，得一般解

$$y = \pm\sqrt{x^2 + C}$$

(c) 雖然原式不是可分離微方方程式的標準式，而是等號左邊是一個 y 的函數與 $\frac{dy}{dx}$ 的乘積，等號右邊是 x 的函數，一個題目本身已做了部分變數分離的可分離微分方程式，故進一步變數分離，得

$$e^y dy = 2xdx$$

接著，兩邊積分，得

$$\int e^y dy = \int 2xdx$$

再根據指數函數的積分公式以及積分的冪次規則，由上式得

$$e^y = x^2 + C$$

最後, 將上式兩邊同取 ln, 解 y, 得

$$\ln e^y = \ln(x^2 + C)$$

並根據指數與對數的互逆性, 得一般解

$$y = \ln(x^2 + C)$$

例 2. 試求下列各微分方程式的特殊解.

(a) $xe^{x^2} + yy' = 0$; 當 $x = 0$ 時, $y = 1$

(b) $x(y + 4) + y' = 0$; 當 $x = 0$ 時, $y = -5$

<解> 雖然原式不是可分離微方方程式的標準式, 但經由將含 x 的式子移至等號右邊, 含 y 與 $\frac{dy}{dx}$ 或 y' 的式子移至等號左邊的改寫, 得原式乃相當於

$$y\frac{dy}{dx} = -xe^{x^2}$$

可辨識出爲一個部分變數分離的可分離微方方程式, 因爲等號左邊爲 y 的函數與 $\frac{dy}{dx}$ 的乘積. 故進一步變數分離, 得

$$ydy = -xe^{x^2}dx$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\int y dy = -\int x e^{x^2} dx$$

再根據積分的冪次規則, 取

$$u = x^2,\ du = 2x dx$$

的代入法, 以及指數函數的積分公式, 由上式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}\int e^{x^2}\cdot 2x dx\\ &= -\frac{1}{2}e^{x^2} + C\end{aligned}$$

最後, 兩邊同乘 2, 得一般解

$$y^2 = -e^{x^2} + C$$

此外, 代入初始條件

$$x = 0,\ y = 1$$

得

$$1 = -e^0 + C = -1 + C$$

故

$$C = 2$$

因此, 將求得的 C 代入一般解, 得特殊解

$$y^2 = -e^{x^2} + 2$$

(b) 經由改寫, 原式乃相當於

$$\frac{dy}{dx} = -x(y+4)$$

等號右邊是一個 x 的函數與一個 y 的函數的乘積, 故爲一可分離微分方程式. 經由變數分離, 得

$$\frac{1}{y+4}dy = -xdx$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\int \frac{1}{y+4}dy = -\int xdx$$

再根據對數的積分規則以及積分的冪次規則, 由上式得

$$\ln|y+4| = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

因爲 y 在對數函數內, 一個解 y 的典型方法是, 兩邊同取 e, 並根據對數與指數的互逆性, 指數律, 經由化簡, 得

$$\begin{aligned} |y+4| &= e^{-\frac{1}{2}x^2+C} \\ &= e^C \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= Ce^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

其中第三個等號成立乃因爲 e^C 亦爲一常數, 爲方便計, 以一個簡單的符號 C 表示即可. 接著, 去絕對值, 由上式得

$$y+4 = \pm Ce^{-\frac{1}{2}x^2} = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

其中爲方便計, 亦以簡單的符號 C 表示亦爲常數的 $\pm C$. 因此, 一般解爲

$$y = -4 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

最後, 代入初始條件

$$x = 0,\ y = -5$$

得

$$-5 = -4 + Ce^0 = -4 + C$$

故

$$C = -1$$

因此, 特殊解爲

$$y = -4 - e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

例 3. 試解微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = k(10 - x),\ 0 \le x \le 10$$

一個單元 60, 例 3 的微分方程式.

<解> 首先, 需辨識出 t 爲自變數, x 爲應變數, 雖然等號右邊不含明確的 t 的函數, 但可視 k 爲 t 的常數函數,

而形成一個 t 的函數與 x 的函數的乘積, 乃一可分離微分方程式. 故變數分離, 得

$$\frac{1}{10-x}dx = kdt$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\int \frac{1}{10-x}dx = \int kdt$$

再根據取

$$u = 10 - x,\ du = -dx$$

代入法, 對數的積分規則, 常數的積分規則, 由上式得

$$-\int \frac{1}{10-x} \cdot (-dx) = kt + C$$

亦相當於

$$-\ln(10-x) = kt + C$$

其中根據假設

$$0 \leq x \leq 10$$

亦即,

$$10 - x \geq 0$$

而可省略對數函數內的絕對值. 又爲便於解 x, 兩邊同乘 -1, 得

$$\ln(10-x) = -kt - C$$

再兩邊同取 e, 並根據指數與對數的互逆性, 指數律, 以及簡易的常數表示法, 由上式得

$$\begin{aligned} 10 - x &= e^{-kt-C} = e^{-C} \cdot e^{-kt} \\ &= Ce^{-kt} \end{aligned}$$

因此, 經由移項整理, 得一般解

$$x = 10 - Ce^{-kt}$$

與之前的結果一致.

例 4. 試求滿足下列條件的圖形的方程式:

(1) 在每一點 (x, y), 圖形的斜率為 $-\dfrac{x}{2y}$.

(2) 圖形過點 $(2, 1)$

<解> 首先, 根據導函數的幾何意義, 條件 (1) 乃相當於

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

又條件 (2) 乃相當於初始條件

$$x = 2, \; y = 1$$

故原問題乃相當於求微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

滿足初始條件

$$x = 2,\ y = 1$$

的特殊解. 顯然地, 原方程式爲一可分離微分方程式, 故經由變數分離,

$$2ydy = -xdx$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\int 2ydy = -\int xdx$$

再根據積分的冪次規則, 由上式得

$$y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

亦相當於

$$x^2 + 2y^2 = C$$

最後, 代入初始條件

$$x = 2,\ y = 1$$

得

$$(2)^2 + 2(1)^2 = C$$

故

$$C = 6$$

因此, 特殊解, 亦即圖形, 爲

$$x^2 + 2y^2 = 6$$

乃一橢圓.