單元 63: 微分方程式的應用
(課本 §C.4)

微分方程式的應用層面相當地廣, 以例說明如下.

例 1. 今透過廣告推銷某新產品給一百萬的潛在顧客. 若聽到廣告的顧客數的變化率與未聽到廣告的顧客數成正比. 又一年後有半數的顧客聽過此種產品, 試問兩年後有多少顧客聽過此種產品?

<解> 此問題是探討聽過廣告的顧客數, 且題目所提供的訊息是聽到廣告的顧客數的變化率, 故根據導函數的變化率意義, 令 y 為經過 t 年後聽過此產品的顧客數 (單位: 百萬), 則 $(1-y)$ 為未聽到廣告的顧客數, 並由題意與成正比的定義, 知

$$\frac{dy}{dt} = k(1-y),\ 0 < y < 1 \tag{1}$$

其中 k 為一個未知的比例常數, 且根據常識以及題意得兩個初始條件

$$t = 0,\ y = 0$$

以及

$$t = 1,\ y = \frac{1}{2}$$

因此, 原問題乃相當於求上述微分方程式滿足初始條件的特殊解, 亦即經過 t 年後聽過此產品的顧客數 y, 並求兩年後聽過此產品的顧客數 $y(2)$.

很明顯地, (1) 式等號的右邊爲一個 t 的常數函數 k 與一個 y 的函數 $(1-y)$ 的乘積, 故爲一可分離微分方程式. 首先, 經由變數分離, 得

$$\frac{1}{1-y}dy = kdt$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\int \frac{1}{1-y}dy = \int kdt$$

再根據積分的對數規則, 以及 $0 < y < 1$ 的條件, 由上式得

$$-\ln(1-y) = kt + C$$

亦相當於

$$\ln(1-y) = -kt + C$$

最後, 兩邊取 e, 並根據常數的簡易表示法, 得

$$1 - y = e^{-kt+C} = Ce^{-kt}$$

因此, 一般解, 亦即經過 t 年後聽過此產品的顧客數

$$y = 1 - Ce^{-kt}$$

又代入第一個初始條件

$$t = 0,\ y = 0$$

得

$$0 = 1 - Ce^0 = 1 - C$$

故

$$C = 1$$

且較明確的經過 t 年後聽過此產品的顧客數爲

$$y = 1 - e^{-kt}$$

再代入第二個初始條件

$$t = 1,\ y = \frac{1}{2}$$

得

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-k}$$

故經由移項整理, 得

$$e^{-k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{2}$$

且根據指數律, 得特殊解, 亦即完全明確的經過 t 年後聽過此產品的顧客數

$$y = 1 - (e^{-k})^t = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

或將 (2) 式兩邊取 ln, 得

$$-k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

亦即,

$$k = \ln 2$$

並代入整理, 得

$$\begin{aligned} y &= 1 - e^{-(\ln 2)t} \\ &= 1 - e^{\ln(2^{-t})} \\ &= 1 - 2^{-t} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t \end{aligned}$$

一個相同的結果, 但過程較長; 此乃說明, 不一定需要明確地求出 k, 就可簡潔地得出特殊解, 一個值得採行的方式.

因此, 兩年後聽過此產品的顧客數

$$\begin{aligned} y(2) &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75 \text{ 百萬人} \end{aligned}$$

例 2. 在一化學反應中, 物質 A 轉換成物質 B 時, 物質 A 的重量的變化率是與當時物質 A 的重量的平方成正比. 又當一開始時, 物質 A 的重量爲 60 克, 且經過一

小時後, 物質 A 的重量僅剩 10 克, 試問經過兩小時後, 物質 A 的重量爲何?

<解> 令 y 爲經過 t 時後物質 A 的重量, 則根據題意, 導函數的變化率意義, 以及正比的定義, 得

$$\frac{dy}{dt} = ky^2, \ y > 0 \tag{3}$$

以及兩個初始條件

$$t = 0, \ y = 60$$

與

$$t = 1, \ y = 10$$

因此, 原問題乃相當於求上述微分方程式滿足初始條件的特殊解, 亦即經過 t 時後物質 A 的重量 y, 再求兩小時後物質 A 的重量 $y(2)$.

明顯地, (3) 式爲一可分離微分方程式, 故由變數分離, 得

$$\frac{1}{y^2}dy = kdt$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int kdt$$

再根據積分的冪次規則, 由上式得

$$-\frac{1}{y} = kt + C$$

因此, 一般解, 亦即經過 t 時後物質 A 的重量

$$y = \frac{-1}{kt + C}$$

又代入第一個初始條件

$$t = 0,\ y = 60$$

得

$$60 = \frac{-1}{C}$$

故

$$C = -\frac{1}{60}$$

且較明確的經過 t 時後物質 A 的重量

$$y = \frac{-1}{kt - \frac{1}{60}}$$

再代入第二個初始條件

$$t = 1,\ y = 10$$

得

$$10 = \frac{-1}{k - \frac{1}{60}}$$

經由交叉相乘, 亦相當於

$$10k - \frac{1}{6} = -1$$

再經由移項整理, 得

$$10k = -1 + \frac{1}{6} = -\frac{5}{6}$$

故

$$k = -\frac{5}{60}$$

且代入上述求得的 k, 並化簡整理, 得特殊解, 亦即完全明確的經過 t 時後物質 A 的重量

$$y = \frac{-1}{-\frac{5}{60}t - \frac{1}{60}} = \frac{60}{5t+1}$$

因此, 兩小時後物質 A 的重量

$$\begin{aligned} y(2) &= \frac{60}{5(2)+1} \\ &= \frac{60}{11} \approx 5.45 \text{ 克} \end{aligned}$$

微分方程式的另一層面應用乃在於探討某種物種族群大小 (或數目) 的演變情形, 經常呈現出的現象是族群大小的變化率與當時族群大小有某種的關係, 因而可以微分方程式

予以模型化, 進而了解族群大小的變化. 令 $y(t)$ 爲經過 t 時後某族群的數目, 今探討三種族群成長模型 (population growth models), 分別爲

(1) 指數成長模型 (exponential growth model), 此乃相當於

$$\frac{dy}{dt} = ky,\ y > 0$$

其中比例常數 $k > 0$, 亦即, 族群大小的變化率與當時族群的大小成正比. 因爲此模型爲一可分離微分方程式, 故由變數分離, 得

$$\frac{1}{y}dy = kdt$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\ln y = kt + C$$

最後, 兩邊取 e 並化簡, 得

$$y = Ce^{kt}$$

其中 $C > 0$, 乃一指數函數, 故稱指數成長模型, 且

$$\lim_{t\to\infty} Ce^{kt} = Ce^{\infty} = \infty$$

表示隨著時間演變, 族群乃無界地遞增.

(2) 羅吉斯成長模型 (logistic growth model), 此乃相當於

$$\frac{dy}{dt} = ky(L-y),\ 0 < y < L$$

其中比例常數 $k > 0$, 且 L 爲族群大小的極限, 亦即, 族群大小的變化率和 "當時族群的大小與剩餘空間 (或可成長空間) 的乘積" 成正比, 可反映出當開始的族群大小接近 0 時, 或經過一段時間後族群的大小接近飽和的 L 時, 族群大小的成長率會接近 0, 故族群成長地很慢, 而呈現出 S 型態的族群大小. 因爲此模型爲一可分離微分方程式, 故由變數分離, 得

$$\frac{1}{y(L-y)}dy = kdt$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\int \frac{1}{y(L-y)}dy = \int kdt$$

因爲上式等號左邊是一個分母已分解成兩個一次因式的有理函數的積分, 故根據部分分式得

$$\frac{1}{L}\left[\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{L-y}dy\right] = kt + C$$

接著, 兩邊同乘 L, 並根據常數的簡易表示法, 亦相當於

$$\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{L-y}dy = Lkt + C$$

然後經由積分的對數規則, 由上式得

$$\ln y - \ln(L - y) = Lkt + C$$

再根據對數律化簡, 兩邊取 e, 指數函數與對數函數的互逆性, 指數律, 以及常數的簡單表示法, 得

$$\frac{y}{L-y} = e^{Lkt+C} = Ce^{Lkt}$$

其中 $C > 0$. 兩邊同乘 $L - y$, 亦相當於

$$y = (L - y)Ce^{Lkt}$$

最後, 移項整理, 合併含 y 的各項, 得

$$y(1 + Ce^{Lkt}) = LCe^{Lkt}$$

因此,

$$y = \frac{LCe^{Lkt}}{1 + Ce^{Lkt}}$$

再將上式的分子分母同除 Ce^{Lkt}, 並根據常數的簡單表示法, 得一簡潔的標準式

$$\begin{aligned} y &= \frac{L}{1 + C^{-1}e^{-Lkt}} \\ &= \frac{L}{1 + Ce^{-Lkt}} \end{aligned}$$

因爲 $C > 0$, 故分母大於 1, 因而族群大小 y 恆小於 L. 又 e^{-Lkt} 是一 t 的遞減函數, 故族群大小會

隨著時間演變而恆遞增, 且

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L}{1+Ce^{-Lkt}} = \frac{L}{1+Ce^{-\infty}} = \frac{L}{1+C\cdot 0} = L$$

表示族群大小會遞增到 L, 一個有限的數量, 符合 L 爲族群大小的極限的意義.

(3) Gompertz 成長模型, 此乃相當於

$$\frac{dy}{dt} = ky\ln\left(\frac{L}{y}\right),\ 0<y<L$$

亦相當於

$$\frac{dy}{dt} = ky(\ln L - \ln y),\ 0<y<L$$

其中比例常數 $k>0$, 且 L 爲族群大小的極限, 亦即, 族群大小的變化率和 "當時族群的大小與對數尺度化 (取對數) 後的可成長空間 (或剩餘空間) 的乘積" 成正比, 類似於羅吉斯成長模型, 可反映出當開始的族群大小接近 0 時, 或經過一段時間後族群的大小接近飽和的 L 時, 族群大小的成長率會接近 0, 故族群成長地很慢, 而呈現出 S 型態的族群大小; 但與羅吉斯成長模型不同的是, 當族群的大小遠離兩個極端的情況時, 因爲取了對數後, 數值變小, 而使得成

長率較緩慢, 是一個較平緩而不陡峭的 S 型態的族群大小. 一般解的推導過程及性質如下例所述.

例 4. 設引進 20 隻狼至一國家公園, 且此公園最多可維持 200 隻狼的生存環境. 又 3 年後狼的數目增長至 40 隻. 若狼隻數目的成長狀態符合 Gompertz 成長模型, 試問 10 年後會有多少隻狼?

<解> 令 $y(t)$ 爲 t 年後狼的數目. 根據題意, 狼隻數目的成長乃一 Gompertz 成長模型, 且狼隻數量的極限

$$L = 200$$

隻, 故得

$$\frac{dy}{dt} = ky \ln\left(\frac{200}{y}\right), \ 0 < y < 200 \tag{4}$$

以及兩個初始條件

$$t = 0, \ y = 20$$

與

$$t = 3, \ y = 40$$

因此, 原問題乃相當於求上述微分方程式滿足初始條件的特殊解, 亦即經過 t 年後狼的數目, 再求 10 年後狼的數目 $y(10)$.

明顯地, (4) 式是一可分離微分方程式, 故由變數分離, 得

$$\frac{1}{y\ln\left(\frac{200}{y}\right)}dy = kdt$$

根據對數律, 亦相當於

$$\frac{1}{y(\ln 200 - \ln y)}dy = kdt$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\int \frac{1}{y(\ln 200 - \ln y)}dy = \int kdt$$

再根據取

$$u = \ln 200 - \ln y,\ du = -\frac{1}{y}dy$$

的代入法, 積分的對數規則, $y < 200$ 的條件, 以及積分的常數規則, 由上式得

$$-\int \frac{1}{\ln 200 - \ln y}\left(-\frac{1}{y}\right)dy = \int kdt$$

以及

$$-\ln(\ln 200 - \ln y) = kt + C$$

兩邊同乘 -1, 並根據常數的簡易表示法, 亦相當於

$$\ln(\ln 200 - \ln y) = -kt + C$$

因爲欲求的 y 在對數函數內, 故兩邊取 e, 並根據對數與指數的互逆性, 以及常數的簡易表示法, 得

$$\ln 200 - \ln y = e^{-kt+C} = Ce^{-kt}$$

其中 $C > 0$. 經由整理, 亦相當於

$$\ln y = \ln 200 - Ce^{-kt}$$

由於欲求的 y 依然在對數函數內, 故兩邊再取 e, 並根據指數與對數的互逆性, 以及指數律, 得

$$\begin{aligned} y &= e^{\ln 200} \cdot e^{-Ce^{-kt}} \\ &= 200e^{-Ce^{-kt}} \end{aligned} \tag{5}$$

乃一般解, 爲兩個指數函數的合成函數, 並含兩個均爲正的未知常數 k 與 C, 故 y 隨著時間而遞增, 且

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} 200e^{-Ce^{-kt}} &= 200e^{-Ce^{-\infty}} \\ &= 200e^{-C\cdot 0} \\ &= 200e^{0} = 200 \end{aligned}$$

表示狼隻的數目會有界地遞增到 200 隻, 符合 200 隻爲狼隻數目極限的意義.

接著, 求特殊解. 首先, 代入第一個初始條件

$$t = 0, \ y = 20$$

並計算整理, 得

$$20 = 200e^{-Ce^{-k\cdot 0}} = 200e^{-C}$$

由此導出

$$\frac{1}{10} = e^{-C} \tag{6}$$

再將兩邊取 ln, 並化簡整理, 得

$$-\ln 10 = -C$$

故

$$C = \ln 10 > 0$$

且較明確的經過 t 年後狼隻的數目

$$y = 200e^{-\ln 10 e^{-kt}}$$

還有一個未知常數 k.

再代入第二個初始條件

$$t = 3,\ y = 40$$

得

$$40 = 200e^{-\ln 10 e^{-3k}}$$

亦相當於

$$\frac{1}{5} = e^{-\ln 10 e^{-3k}}$$

因爲欲求的 k 位於兩個指數函數內, 故先上式兩邊同取 ln, 計算整理, 並根據指數與對數的互逆性, 得

$$-\ln 5 = -\ln 10 e^{-3k}$$

亦相當於

$$\frac{\ln 5}{\ln 10} = e^{-3k}$$

再一次將上式兩邊同取 ln, 得

$$\ln\left(\frac{\ln 5}{\ln 10}\right) = -3k$$

故經由對數律的化簡整理, 得

$$k = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\ln 5}{\ln 10}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\ln 10}{\ln 5}\right) > 0$$

最後, 將 k 代入, 得特殊解, 亦即完全明確的經過 t 年後狼隻的數目

$$y = 200e^{-\ln 10 e^{-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\ln 10}{\ln 5}\right)t}}$$

因此, 10 年後狼隻的數目爲

$$\begin{aligned} y(10) &= 200e^{-\ln 10 e^{-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\ln 10}{\ln 5}\right)(10)}} \\ &\approx 200e^{-2.3026e^{-0.1194(10)}} \\ &\approx 100 \text{ 隻} \end{aligned}$$

或根據指數律

$$a^{bc} = \left(a^b\right)^c$$

將 (6) 式代入 (5) 式的一般解, 得較明確的經過 t 年後狼隻的數目

$$\begin{aligned} y &= 200\left(e^{-C}\right)^{e^{-kt}} \\ &= 200\left(\frac{1}{10}\right)^{e^{-kt}} \end{aligned} \tag{7}$$

再代入第二個初始條件

$$t = 3,\ y = 40$$

得

$$40 = 200\left(\frac{1}{10}\right)^{e^{-3k}}$$

亦相當於

$$\frac{1}{5} = \left(\frac{1}{10}\right)^{e^{-3k}}$$

接著, 兩邊取 ln, 並根據對數律化簡, 由上式得

$$-\ln 5 = -e^{-3k}\ln 10$$

亦相當於

$$e^{-3k} = \frac{\ln 5}{\ln 10}$$

最後, 再根據上述的指數律改寫 (7) 式, 並將上式代入, 得特殊解, 亦即完全明確的經過 t 年後狼隻的數目

$$\begin{aligned} y &= 200\left(\frac{1}{10}\right)^{(e^{-3k})^{t/3}} \\ &= 200\left(\frac{1}{10}\right)^{\left(\frac{\ln 5}{\ln 10}\right)^{t/3}} \end{aligned}$$

一個熟練運用指數律與對數律的較簡潔過程.

微分方程式亦可應用於遺傳學 (genetics) 的模型建立, 如混合選擇模型 (hybrid selection model), 亦即, 令 $y(t)$ 爲某一物種在繁殖 t 代後, 含某種屬性的比率, 則混合選擇模型爲

$$\frac{dy}{dt} = ky(1-y)(a-by),\ 0 \le y \le 1$$

其中 k, a, 與 b 乃是由遺傳屬性所決定的常數, 亦即, 某種屬性比率的變化率和 "當時含此種屬性的比率, 未含此種屬性的比率, 以及由遺傳屬性所決定的一線性式的乘積" 成正比; 當 $a < b$ 時, 一種反映出的特徵爲, 屬性比率在比率門檻 $\frac{a}{b}$ 前, 屬性比率的變化率 $\frac{dy}{dt}$ 爲正, 故根據導函數的性質, 含此種屬性的比率是由緩慢的速度開始遞增, 而超過門檻後, 屬性比率的變化率 $\frac{dy}{dt}$ 爲負, 故含此種屬性的比率呈現遞減, 有一種門檻的效應. 一般解的推導過程如下例所述.

例 4. 欲探討甲蟲中含有屬性 D 的比率在一代與一代間的變化情形. 若在開始調查時, 有一半的甲蟲有屬性 D, 且經過四代後, 有 80% 的甲蟲有屬性 D. 試求在混合選擇模型下, 取 $a = 2$ 且 $b = 1$ 時, 10 代後甲蟲中含有屬性 D 的比率.

<解> 令 $y(t)$ 爲 t 代後甲蟲中含屬性 D 的比率. 由題意知

$$\frac{dy}{dt} = ky(1-y)(2-y),\ 0 \le y \le 1 \tag{8}$$

且兩個初始條件爲

$$t = 0,\ y = 0.5$$

以及

$$t = 4,\ y = 0.8$$

則原問題乃相當於求上述微分方程式滿足初始條件的特殊解, 亦即經過 t 代後甲蟲中含屬性 D 的比率, 再求 10 代後甲蟲中含屬性 D 的比率 $y(10)$.

明顯地, (8) 式是一可分離微分方程式, 故由變數分離法, 得

$$\int \frac{1}{y(1-y)(2-y)} dy = \int k dt \tag{9}$$

因爲上式等號左邊是分母爲一次式乘積的有理函數的積分, 故根據部分分式積分法, 令

$$\frac{1}{y(1-y)(2-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} + \frac{C}{2-y}$$

並解 A, B, C. 首先, 兩邊同乘 $y(1-y)(2-y)$, 得

$$1 = A(1-y)(2-y) + By(2-y) + Cy(1-y)$$

接著, 代 $y = 0$, 得

$$1 = 2A$$

故

$$A = \frac{1}{2}$$

再代 $y = 1$, 得

$$1 = B$$

故

$$B = 1$$

最後, 代 $y = 2$, 得

$$1 = -2C$$

故

$$C = -\frac{1}{2}$$

因此, 代入上述求得的 A, B, 與 C, 並根據積分的對數規則, $0 < y < 1$ 的假設條件, 以及對數律的化簡整理 得

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{y(1-y)(2-y)}dy \\
&= \int \frac{1/2}{y}dy + \int \frac{1}{1-y}dy + \int \frac{-1/2}{2-y}dy \\
&= \frac{1}{2}\ln y - \ln(1-y) + \frac{1}{2}\ln(2-y) \\
&= \ln \frac{[y(2-y)]^{1/2}}{1-y}
\end{aligned}$$

而等號右邊爲

$$\int k dt = kt + C$$

故由 (9) 式, 得

$$\ln \frac{[y(2-y)]^{1/2}}{1-y} = kt + C$$

因爲欲求的 y 在對數函數內, 故兩邊取 e, 並根據指數與對數的互逆性, 指數律, 以及常數的簡易表示法, 得

$$\frac{[y(2-y)]^{1/2}}{1-y} = e^{kt+C} = Ce^{kt}$$

再兩邊平方, 並根據常數的簡易表示法, 得以方程式型式呈現的一般解

$$\frac{y(2-y)}{(1-y)^2} = C^2e^{2kt} = Ce^{2kt}$$

接著, 求特殊解. 首先, 代入第一個初始條件

$$t = 0,\ y = \frac{1}{2}$$

並計算整理, 得

$$\frac{(1/2)(3/2)}{1/4} = Ce^{2k(0)} = C$$

故

$$C = 3$$

且較明確的經過 t 代後含屬性 D 的比率爲

$$\frac{y(2-y)}{(1-y)^2} = 3e^{2kt}$$

再代入第二個初始條件

$$t = 4,\ y = 0.8 = \frac{4}{5}$$

並計算整理, 得

$$\frac{(4/5)(6/5)}{(1/5)^2} = 3e^{2k(4)} = 3e^{8k}$$

亦相當於

$$24 = 3e^{8k}$$

接著, 兩邊同除 3, 得

$$8 = e^{8k}$$

再同取 ln, 得

$$\ln 8 = 8k$$

故

$$k = \frac{1}{8} \ln 8$$

最後, 將 k 代入, 得特殊解, 亦即完全明確的經過 t 代後含屬性 D 的比率爲

$$\frac{y(2-y)}{(1-y)^2} = 3e^{2\left(\frac{1}{8}\ln 8\right)t} = 3e^{\frac{t}{4}\ln 8}$$

因此, 代入 $t = 10$, 並解 y, 得經過 10 代後含屬性 D 的比率爲

$$\frac{y(2-y)}{(1-y)^2} = 3e^{\frac{10}{4}\ln 8}$$

亦相當於經由數學軟體, 或令

$$a = 3e^{\frac{10}{4}\ln 8}$$

並整理成一元二次方程式

$$y^2 - 2y + \frac{a}{1+a} = 0$$

且以公式解, 得

$$y = 1 - \sqrt{\frac{1}{1+a}} \approx 0.96$$

亦即經過 10 代後會有 96% 的甲蟲具有屬性 D.

例 5. 設一水槽中含有 40 加侖的溶液, 成分爲 90% 的水與 10% 的酒精. 另一種含一半水及一半酒精的溶液以 4 (加侖/分) 的速率注入此水槽, 並經過均勻攪拌後也以 4 (加侖/分) 的速率流出此水槽, 如圖示. 試問 10 分鐘後, 水槽中的酒精量爲何?

<解> 令 $y(t)$ 爲經過 t 分鐘後水槽中的酒精量. 由題意知, 每分鐘以 4 加侖的溶液注入水槽, 且每一加侖的溶液含有 50% 的酒精, 故水槽中酒精的增加率爲

$$4(0.5) \text{ (加侖/分)}$$

又因爲流入與流出的速率一樣, 故水槽中的溶液量不變, 始終爲 40 加侖, 但經由均勻攪拌後, 溶液中的酒精比率爲

$$\frac{y}{40}$$

且以每分鐘 4 加侖的速率流出, 因而水槽中酒精量的減少率爲

$$4\left(\frac{y}{40}\right) \text{ (加侖/分)}$$

接著, 根據一個一般性的常識, 即 "水槽中酒精量的變化率" 等於 "流入 (增加) 的酒精量變化率" 減掉 "流出

(減少) 的酒精量變化率'', 導函數的變化率意義, 以及題意, 得

$$\frac{dy}{dt} = 4(0.5) - 4\left(\frac{y}{40}\right)$$

亦相當於

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{10}y + 2$$

以及初始條件

$$t = 0, \; y = 40(0.1) = 4$$

因此, 原問題乃相當於求上述微分方程式滿足初始條件的特殊解, 亦即經過 t 分鐘後水槽中的酒精量, 再求 10 鐘後水槽中的酒精量 $y(10)$. 首先標準化原微分方程式, 得

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{10}y = 2$$

乃一

$$P(t) = \frac{1}{10}$$

且

$$Q(t) = 2$$

的一階線性微分方程式, 故根據常數的積分規則, 得積分因式

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\int P(t)dt} \\ &= e^{\int \frac{1}{10}dt} = e^{\frac{1}{10}t} \end{aligned}$$

接著, 代入此積分因式, 並根據指數函數的積分公式, 以及指數律的化簡整理, 得一般解

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{u(t)}\int Q(t)u(t)dt \\ &= \frac{1}{e^{\frac{1}{10}t}}\int 2e^{\frac{1}{10}t}dt \\ &= e^{-\frac{1}{10}t}[2(10)e^{\frac{1}{10}t}+C] \\ &= 20+Ce^{-\frac{1}{10}t} \end{aligned}$$

再代入初始條件

$$t=0,\ y=4$$

得

$$4=20+Ce^{0}=20+C$$

故

$$C=-16$$

最後, 將求得的 C 代入一般解, 得特殊解, 亦即經過 t 分鐘後水槽中的酒精量

$$y=20-16e^{-\frac{1}{10}t}$$

因此, 10 分鐘後水槽中的酒精量爲

$$\begin{aligned} y(10) &= 20-16e^{-\frac{1}{10}(10)} \\ &= 20-16e^{-1} \\ &\approx 14.1 \text{ (加侖)} \end{aligned}$$

註. 當 $t \to \infty$, 亦即時間夠久後, 水槽中的酒精量為

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(20-16e^{-\frac{1}{10}t}\right) &= 20-16e^{-\infty}\\ &= 20-16\cdot 0\\ &= 20\ (\text{加侖})\end{aligned}$$

是水槽中溶液總量 40 加侖的一半, 與常識吻合, 此乃因為注入的是一半水, 一半為酒精的溶液, 故時間夠久後, 水槽內的狀態會變為注入溶液的狀態, 亦即一半水, 一半酒精的狀態.

問. 何時水槽中的酒精量為 12 加侖? 此乃相當於求 t 使得酒精量

$$20-16e^{-\frac{1}{10}t}=12$$

經由移項整理, 得

$$e^{-\frac{1}{10}t}=\frac{1}{16}(20-12)=\frac{1}{2}$$

再將兩邊同取 ln, 並根據指數與對數的互逆性, 以及對數律的化簡, 得

$$-\frac{1}{10}t=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$$

因此, 約經過

$$t=10\ln 2\approx 6.93\ (\text{分})$$

後, 水槽中的酒精量爲 12 加侖.

問. 水槽中酒精量是如何變化的? 將酒精量 y 對時間 t 微分, 得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[20-16e^{-\frac{1}{10}t}\right]\\ &= (-16)\left(-\frac{1}{10}\right)e^{-\frac{1}{10}t}\\ &= \frac{8}{5}e^{-\frac{1}{10}t}\end{aligned}$$

恆大於 0, 故酒精量恆遞增, 由一個僅含 10% 的酒精濃度, 亦即一個比注入溶液的固定 50% 酒精濃度低的狀態開始, 隨著時間水槽中的酒精量遞增至極限

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(20-16e^{-\frac{1}{10}t}\right) &= 20-16e^{-\infty}\\ &= 20 \ (\text{加侖})\end{aligned}$$

使得酒精濃度增至 50%, 與注入溶液相同的酒精濃度, 符合常識.

幾個相關的延伸性問題,

問 1. 若流入溶液的酒精濃度是低於水槽中的初始酒精濃度時, 如流入 5% 的酒精溶液, 水槽中的酒精量是如何變化的?

問 2. 若溶液流出水槽的速率大於流入的速率時, 如 5 (加侖/分), 水槽中的酒精量如何變化?

問 3. 若水槽的總容量為 100 加侖, 且溶液流出水槽的速率小於流入的速率時, 如 3 (加侖/分) 時, 水槽中的酒精量如何變化?