

單元 6：極限 (課本 §1.5)

“極限 (limit)” 的概念常出現於日常的用語中，如

速限 (speed limit)

摔角參賽者的體重限制 (wrestler's weight limit)

忍耐度 (limit of one's endurance)

或

彈簧的伸展極限 (a spring's stretching limit)

等，均說明極限乃是一個界限 (bound)，在有些情況下是無法達到的，但在另一些情況下是可達到並超越的。

舉例，若一彈簧承受的重量大於或等於 10 磅時，彈簧會壞掉。

問。如何求彈簧的最大伸展長度？

答。載重並觀察伸展長度 s 的變化，如下圖所示。如果當載重 w 愈接近 10 磅時，長度 s 會愈接近一實數 L ，

則稱當 w 接近 10 磅時， s 的極限為 L . 所以，最大伸展長度等於當 w 接近 10 磅時， s 的極限.

一. 極限的數學表示法

數學式

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

若且為若當 x 由任意一邊愈來愈靠近 c 時， $f(x)$ 可任意地靠近一實數 L ，如圖示.

例 1. 試求

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)$$

<解> 令

$$f(x) = x^2 + 1$$

(i) 圖形法：函數 $f(x)$ 的圖形為一拋物線，如圖示.

由圖可知，當 x 由兩邊愈來愈接近 1 時， $f(x)$ 的值可任意地靠近 2，故

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$$

(ii) 數值表：列舉 x 由兩邊靠近 1 時，所對應出的 $f(x)$ 值，如下表，

x	.90	.99	.999	1
$f(x)$	1.81	1.98	1.998	2
x	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2	2.002	2.02	2.2

同樣可觀察出，當 x 由兩邊愈來愈接近 1 時， $f(x)$ 的值可任意地靠近 2，故得出相同的結論

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$$

例 2. 試由函數的圖形求下列各函數在 $x = 1$ 的極限。

$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$(b) f(x) = \frac{|x - 1|}{x - 1}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

<解> (a) 函數 $f(x)$ 在 $x = 1$ 未定義，且當 $x \neq 1$ 時，

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

故得 $f(x)$ 的圖形為一在 $x = 1$ 有一缺口的直線

$$y = x + 1$$

如圖示。

由圖形知，當 x 由兩邊愈來愈接近 1 時， $f(x)$ 的值可任意地靠近 2，故

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

註 1. 雖然 $f(x)$ 在 $x = 1$ 未定義（因為分母等於 0），但不影響在 $x = 1$ 的極限，這是因為極限是考慮 $f(x)$ 在 $x = 1$ 附近的值的變化情形，而不是 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的值。

(b) 函數 $f(x)$ 在 $x = 1$ 未定義，且當 $x > 1$ 時， $x - 1 > 0$ ，故去絕對值時不變號，得

$$\frac{|x - 1|}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

同理，當 $x < 1$ 時， $x - 1 < 0$ ，故去絕對值時要加一個負號，而得

$$\frac{|x - 1|}{x - 1} = \frac{-(x - 1)}{x - 1} = -1$$

因此，函數 $f(x)$ 的圖形如下圖所示。

由圖知，當 x 由右邊接近 1 時， $f(x)$ 可任意地靠近 1；但當 x 由左邊接近 1 時， $f(x)$ 却是可任意地靠近 -1 ，亦即， $f(x)$ 無法同時任意地靠近一個實數 L 。因此，

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ 不存在}$$

(c) 由函數 $f(x)$ 的定義，當 $x \neq 1$ 時，圖形為一條在 $x = 1$ 有一缺口的直線

$$y = x$$

當 $x = 1$ 時， $f(x) = 0$ ，而得一個單點

$$(1, 0)$$

因此，函數 $f(x)$ 的圖形如下圖所示。

由圖知，當 x 由兩邊愈來愈接近 1 時， $f(x)$ 的值可任意地靠近 1，故

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

註 2. 雖然 $f(x)$ 在 $x = 1$ 有定義且函數值爲 0，但不影響極限值 1，此乃因爲極限值是觀察函數 $f(x)$ 在 $x = 1$ 附近的變化，而不是 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的函數值。

註 3. 由數值表亦可得到一致的結果，請參看課本。

結論. 極限的三個重要概念：

(i) 數學式

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

乃相當於當 x 由兩邊愈來愈接近 c 時， $f(x)$ 可任意地靠近一實數 L 。

(ii) 當 x 由兩邊愈來愈接近 c 時，若 $f(x)$ 任意地靠近兩個不同的實數時，則極限不存在。

(iii) 函數 $f(x)$ 在 $x = c$ 的函數值無法決定 $f(x)$ 在 $x = c$ 的極限，此乃因爲極限是考慮函數 $f(x)$ 在 $x = c$ 附近的變化情形，而不受 $f(x)$ 在 $x = c$ 的值的影響。

二. 極限的性質

令 b, c 為實數且 n 為正整數，則

(1) 常數 b 在 $x = c$ 的極限就是常數自己，亦即，

$$\lim_{x \rightarrow c} b = b$$

因為無論 x 如何地靠近 c ，所對應的函數值恆為 b ，故任意地靠近 b ，如圖示。

(2) x 在 $x = c$ 的極限就是 c ，亦即，

$$\lim_{x \rightarrow c} x = c$$

因為當 x 由兩邊愈來愈接近 c 時，所對應的函數值 x 當然是任意地靠近 c ，如圖示。

(3) x^n 在 $x = c$ 的極限就是 c^n ，亦即，

$$\lim_{x \rightarrow c} x^n = c^n$$

舉例，當 $n = 2$ 時，如圖示，

$$\lim_{x \rightarrow c} x^2 = c^2$$

(4) $\sqrt[n]{x}$ 在 $x = c$ 的極限就是 $\sqrt[n]{c}$, 亦即,

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

舉例，當 $n = 2$ 時，如圖示，

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$$

註. 若 n 為偶數，則 c 必須大於 0，否則會出現當 x 接近 c 時， x 為負，而導致 $\sqrt[n]{x}$ 未定義的情況.

三. 極限的運算

設

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

與

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

均存在且 b 為一實數，則

(1) 純量乘積: b 倍的極限等於極限的 b 倍，亦即，

$$\lim_{x \rightarrow c} [bf(x)] = b \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]$$

(2) 加減法：加減的極限等於極限的加減，亦即

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

(3) 乘法：相乘的極限等於極限的乘積，亦即，

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)] \cdot [\lim_{x \rightarrow c} g(x)]$$

(4) 除法：商的極限等於極限的商，亦即，當

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$$

時，

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

(5) 次方： n 次方的極限等於極限的 n 次方，亦即，

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$$

(6) 方根： n 次方根的極限等於極限的 n 次方根，亦即，

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$$

四. 求極限的技巧

(1) 代入法 (direct substitution).

結合極限的性質與運算，直接將 c 代入 $f(x)$ 得極限，如

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 \\ &= 2^2 - 2(2) + 3 = 3 \\ &= f(2) \end{aligned}$$

其中第一個等號成立乃根據極限的運算 (1) 與 (2)，第二個等號成立乃根據極限的性質 (1), (2) 與 (3).

推廣. (1) 設 $p(x)$ 為一多項式，則

$$\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$$

亦即，可用代入法求多項式的極限.

(2) 設有理函數

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

其中 $q(c) \neq 0$, 則根據極限的運算 (4) 以及推廣 (1), 得

$$\lim_{x \rightarrow c} r(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} p(x)}{\lim_{x \rightarrow c} q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)} = r(c)$$

亦即, 當有理函數的分母在 $x = c$ 不等於 0 時, 可用代入法求有理函數在 $x = c$ 的極限.

註. 其它可用代入法求極限的函數, 會陸續地介紹.

(2) 消去法 (cancellation technique).

根據如下的替代定理 (replacement theorem), 將共同因式消去而求極限的方法.

替代定理. 令 c 為一實數且對所有的 $x \neq c$,

$$f(x) = g(x)$$

(即, $f(x)$ 與 $g(x)$ 僅在 $x = c$ 不同). 若

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

存在, 則 $f(x)$ 在 $x = c$ 的極限亦存在且

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

亦即，求 $f(x)$ 在 $x = c$ 的極限時，可以用 $g(x)$ 替代。

爲何成立？因爲在 $x = c$ 的極限是考慮函數在 $x = c$ 附近的行爲變化，而根據假設，此二函數在 $x = c$ 以外均相等，自然它們的行爲就一樣，因此有相同的極限。

以例說明消去法如下。

例 3. 試求

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

<解> (1) 代入法：代 $x = 1$ ，得

$$\frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

不是一實數，稱作未定型 (indeterminate form)。因此，代入法不適用。

(2) 消去法：未定型 $\frac{0}{0}$ 表示分子，分母均有 $x - 1$ 的因式，故經由分解與消去，得

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= x^2 + x + 1, \quad x \neq 1 \end{aligned}$$

因此，由替代定理，

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) \\ &= 1^2 + 1 + 1 = 3\end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃因為 $x^2 + x + 1$ 為一多項式，故可用代入法求極限，圖示如下。

例 4. 試求

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$$

<解> (1) 代入法：代 $x = -3$ ，得

$$\frac{(-3)^2 + (-3) - 6}{(-3) + 3} = \frac{9 - 3 - 6}{-3 + 3} = \frac{0}{0}$$

乃一未定型，故代入法不適用。

(2) 消去法：未定型 $\frac{0}{0}$ 表示分子，分母有共同的因式 $x + 3$ ，故經由分解與消去，得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} (x - 2) \\ &= -3 - 2 = -5\end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃根據替代定理，第三個等號成立乃因為 $x - 2$ 為一多項式，而以代入法求極限所致，如圖示。

例 5. 試求

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$$

<解> 先嘗試代入法，代 $x = -2$ ，得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} &= \frac{(-2)^2 + (-2) - 2}{(-2) - 2} \\ &= \frac{4 - 2 - 2}{-2 - 2} = \frac{0}{-4} = 0\end{aligned}$$

乃一實數。因此，代入法適用且

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = 0$$

例 6. 試求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

<解> 代 $x = 0$ ，得

$$\frac{\sqrt{4} - 2}{0} = \frac{0}{0}$$

乃一未定型，故代入法不適用。

消去法：因為原式含有根號，故不易如前面的例子可以用分解的方式找出共同的因式，但可用有理化法分解出共同的因式並消去，亦即，

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} \\ &= \frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}, \quad x \neq 0\end{aligned}$$

最後，根據替代定理，

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+2}} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

五. 單邊極限 (one-sided limits)

數學式

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

表示 x 由左邊靠近 c 時的極限，如圖示。

數學式

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

表示 x 由右邊靠近 c 時的極限，如圖示。

結論：在 $x = c$ 的雙邊極限

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

乃相當於

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

亦即，在 $x = c$ 的兩個單邊極限均存在且等於雙邊極限，此乃因為雙邊極限是要求函數 $f(x)$ 在 $x = c$ 的兩邊行為均任意地靠近 L ，因而僅從單邊而言，兩個單邊的行為自然必須任意地靠近 L ，故有此結論。

例 7. 令函數

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x < 1 \\ 4x - x^2, & x > 1 \end{cases}$$

試求

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

<解> 當函數需以兩個（含）以上的數學式子表示時，稱作複合函數 (compound function)，故 $f(x)$ 為一複合函數，此時不方便同時以多個式子表示 $f(x)$ ，而求出極限，故可先求單邊極限再求（雙邊）極限，如下述。首先，當 x 由左邊接近 1 時，得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (4 - x) \\ &= 4 - 1 = 3\end{aligned}$$

其中第一個等號成立乃因為當 x 由左邊接近 1 時，表示 $x < 1$ ，而根據 $f(x)$ 的定義，

$$f(x) = 4 - x$$

第二個等號成立乃因為求多項式 $4 - x$ 的雙邊極限時，可以代入法求之，而單邊極限只是雙邊極限的一部分，故自然可用代入法將 1 (不是 1^-) 代入求極限。

同理，當 x 由右邊接近 1 時， $x > 1$ ，故根據 $f(x)$ 的定義，得

$$f(x) = 4x - x^2$$

以及

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x - x^2) \\ &= 4(1) - (1)^2 = 3\end{aligned}$$

最後，因為此二單邊極限均存在且相等，故雙邊極限

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

例 7. 試求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x|}{x}$$

<解> 因為原式含有絕對值 $|2x|$ ，故在 0 的兩邊有不同的數學表示式，而為一複合函數，需先求單邊極限，再決定（雙邊）極限。首先，當 x 由左邊接近 0 時， $x < 0$ ，故

$$|2x| = -2x$$

且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|2x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2) = -2 \end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃因為常數的雙邊極限就是常數自己，自然常數的單邊極限也是常數本身所致。

同理，當 x 由右邊接近 0 時， $x > 0$ ，故

$$|2x| = 2x$$

且

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|2x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 = 2\end{aligned}$$

最後，因為兩個單邊極限不相等，故雙邊極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x|}{x}$$

不存在。

註。函數在 $x = c$ 的兩邊的行為不一致時，此函數在 $x = c$ 的極限不存在。

六. 無界行為 (unbounded behavior)

另一個造成函數 $f(x)$ 在 $x = c$ 的極限不存在的原因。

舉例，試問

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x - 2}$$

是否存在？

首先，考慮左單邊極限，亦即 x 由左邊接近 2 時，故 $x < 2$ 且 x 可任意地接近 2，因而

$$x - 2 \rightarrow 0$$

但為負，以

$$0^-$$

表示之，亦即為一任意靠近 0 的負數，並得出左單邊極限

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x - 2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

同理，當 x 由右邊接近 2 時， $x > 2$ 且

$$x - 2 \rightarrow 0$$

但為正，以

$$0^+$$

表示之，為一任意靠近 0 的正數，因而右單邊極限

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x - 2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

因此，二單邊極限均不存在。故，

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x - 2}$$

不存在且原因為，當 $x \rightarrow 2^-$ 時， $f(x)$ 乃無界地遞減到 $-\infty$ ；當 $x \rightarrow 2^+$ 時， $f(x)$ 乃無界地遞增到 $+\infty$ ，如圖示。

練習題 1. 試求

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{2 - x}$$

練習題 2. 試求

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2 + x}{x^2 - 9}$$

練習題 3. 試求

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{\sqrt{x + 2}}$$