單元 7: 連續性

(課本 §1.6)

一. 口語, 直觀上的定義

函數 f 在點 $x = c$ 連續 (continuous) 若且爲若函數 f 的圖形在點 $x = c$ 處無斷開的現象.

三種圖形斷開 (亦即, 造成不連續) 的現象, 如下圖所示.

現象 **1:** 在點 $x = c_1$, $f(c_1)$ 未定義.

現象 **2.** 在點 $x = c_2$,

$$\lim_{x \to c_2} f(x)$$

不存在, 因爲根據圖示,

$$\lim_{x \to c_2^-} f(x) = 4$$

但

$$\lim_{x \to c_2^+} f(x) = 2$$

兩邊的行爲不一致, 故極限不存在; 雖然

$$f(c_2) = 4$$

有定義.

現象 **3.** 在點 $x = c_3$,

$$f(c_3) \neq \lim_{x \to c_3} f(x)$$

雖然

$$f(c_3) = 5$$

有定義, 且

$$\lim_{x \to c_3} f(x) = 6$$

亦存在.

二. 正式定義

定義 1 令 $c \in (a, b)$ 且 f 的定義域包含 (a, b). 則函數 f 在點 $x = c$ 連續若且爲若

(i) $f(c)$ 有定義.

(ii) f 在點 $x=c$ 的極限

$$\lim_{x\to c} f(x)$$

存在.

(iii) f 在點 $x=c$ 的函數值等於極限值, 亦即,

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

定義 2. 函數 f 在開區間 (a,b) 上連續若且爲若 f 在 (a,b) 中的每一點均連續.

註 1. 由定義 1 的 (iii) 知, 若一函數在點 $x=c$ 的極限可由代入法求得, 亦即,

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

則此函數在點 $x=c$ 連續. 故

(1) 多項式在每一實數都連續, 因爲對任一實數 c,

$$\lim_{x\to c} p(x)=p(c)$$

(2) 有理函數在分母不等於 0 的地方均連續, 因為若分母 $q(c) \neq 0$, 則

$$\lim_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$$

註 2. 非連續點 (discontinuous points), 如圖中的 c_1, c_2, c_3, 可分成如下的二類.

(1) 可移除的 (removable): 經由重新定義, 可使其成為連續點的非連續點, 此乃相當於極限存在, 卻不連續的情形, 因為只要將函數值重新定義成極限值即可, 例如, 點 $x = c_1$, 原先:

$$\lim_{x \to c_1} f(x) = 5$$

但 $f(c_1)$ 未定義, 所以不連續.

修正: 令

$$f(c_1) = 5$$

則

$$f(c_1) = 5 = \lim_{x \to c_1} f(x)$$

故變成連續.

點 $x = c_3$, 原先:

$$f(c_3) = 5 \neq 6 = \lim_{x \to c_3} f(x)$$

故不連續.

修正: 令 $f(c_3) = 6$, 則

$$f(c_3) = 6 = \lim_{x \to c_3} f(x)$$

故在 $x = c_3$ 連續.

(2) 不可移除的 (nonremovable): 無法改變非連續性的非連續點, 此乃相當於極限不存在的情形, 因為極限是由那點附近的行為所決定, 與那點的函數值不相干, 故無論如何定義那點的值, 那點附近的行為還是一樣, 因而極限依然不存在, 無法滿足那點的極限值等於函數值的條件, 所以還是不連續, 例如, 點 $x = c_2$, 原先:

$$\lim_{x \to c_2} f(x)$$

不存在, 因為

$$\lim_{x \to c_2^-} f(x) = 4 \neq 2 = \lim_{x \to c_2^+} f(x)$$

故不連續.

修正: 不可行, 因爲只改變在點 $x = c_2$ 的函數値, 這點附近的行爲並沒改變, 故極限値依然不存在, 因而依然是非連續.

例 1. 試求下列各函數的連續點及非連續點.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

<解> (a) $f(x)$ 爲一有理函數, 且分母等於 0 乃相當於 $x = 0$, 所以除了 $x = 0$ 以外, f 在其餘點均連續. 故,

$$\text{連續點} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

又

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

其中 0^+ 表示任意靠近 0 的正數. 故在非連續的點 $x=0$ 的雙邊極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

不存在. 因此, $x=0$ 爲一不可移除的非連續點. 另外,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

其中 0^- 表示任意靠近 0 的負數. 因此, 當 x 由左邊任意靠近 0 時, 函數值 $f(x)$ 是無界地遞減, 圖示如下.

(b) $f(x)$ 是一有理函數, 且分母等於 0 乃相當於 $x=1$. 因此,

$$\text{連續點}=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}(x+1)=2\end{aligned}$$

故令

$$f(1)=2$$

時, 則函數 f 在 $x=1$ 變成連續. 因此, $x=1$ 爲一可移除的非連續點, 如圖所示.

(c) $f(x)$ 爲一有理函數, 且分母恆不等於 0, 故 f 在每一實數都連續. 因此,

$$\text{連續點} = (-\infty, \infty)$$

三. 閉區間上的連續性

定義 3. 設函數 f 的定義域爲閉區間 $[a, b]$, 則 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續若且爲若

(i) f 在開區間 (a, b) 上連續.

(ii) x 由右邊任意靠近 a 時,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

亦即, f 在 $x = a$ 的右邊連續, 且當 x 由左邊任意靠近 b 時,

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

亦即, f 在 $x = b$ 的左邊連續. 也就是說, 只考慮端點在定義域內的單邊連續性, 因爲不在定義域內的端點的另一邊無從考慮, 故此較鬆的條件是合理的.

例 2. 令函數

$$g(x)=\begin{cases}5-x, & -1\le x\le 2,\\ x^2-1, & 2<x\le 3.\end{cases}$$

試討論 g 的連續性.

<解> 函數 $g(x)$ 的定義域為 $[-1,3]$, 可將其分成三部分, 分別討論連續性如下:

(1) $[-1,2)$: 此時

$$g(x)=5-x$$

為一多項式, 故 g 在其上連續.

(2) $(2,3]$: 此時

$$g(x)=x^2-1$$

亦為一多項式, 故 g 在其上亦連續.

(3) 連接點 $x=2$: 首先,

(i) $g(2)=5-2=3$, 故函數 g 在點 $x=2$ 有定義.

(ii) 當 x 由右邊接近 2 時的單邊極限

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2-1) = 4-1 = 3$$

且由左邊接近 2 時的單邊極限

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} (5-x) = 5-2 = 3$$

結果一致. 故函數 g 在點 $x=2$ 的雙邊極限

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3$$

是存在的.

(iii) 由 (i) 與 (ii), 得

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3 = g(2)$$

亦即, 函數 g 在 $x=2$ 的極限值等於函數值.

因此, 根據連續性的定義, 函數 g 在點 $x=2$ 也連續.

最後, 合併 (1)-(3), 得函數 g 在閉區間 $[-1,3]$ 上均連續.

四. 最大整數函數

最大整數函數 (greatest integer function) 又稱作高斯函數, 定義爲

$$[[x]] \stackrel{\text{def}}{=} \text{小於或等於 } x \text{ 的最大整數}$$

例如,

$$[[1.5]] = 1,\ [[3]] = 3,\ [[-2.1]] = -3$$

以及

$$[[-5]] = -5,\ [[0.5]] = 0,\ \ldots$$

其圖形如下, 乃一種階梯函數 (step function). 由圖知, 當 x 由右邊接近 2 的單邊極限

$$\lim_{x \to 2^+} [[x]] = \lim_{x \to 2^+} 2 = 2$$

且當 x 由左邊接近 2 的單邊極限

$$\lim_{x \to 2^-} [[x]] = \lim_{x \to 2^-} 1 = 1$$

結果不一致. 故

$$\lim_{x \to 2} [[x]]$$

不存在, 因而 $x = 2$ 爲一個不可移除的非連續點.

同理, 令 n 爲任一整數, 當 x 由右邊接近 n 時,

$$x > n \text{ 且 } x < n + 1$$

故右單邊極限

$$\lim_{x\to n^+}[[x]] = \lim_{x\to n^+} n = n$$

當 x 由左邊接近 n 時,

$$x < n \text{ 且 } x > n-1$$

故左單邊極限

$$\lim_{x\to n^-}[[x]] = \lim_{x\to n^-}(n-1) = n-1$$

結果不一致. 因此, 雙邊極限

$$\lim_{x\to n}[[x]]$$

不存在, 由此導出 $x = n$ 爲一不可移除的非連續點. 綜合上述, 得所有的整數, 即 0, ±1, ±2, ..., 均爲不可移除的非連續點, 與圖形一致.

應用 1. **模型化成本函數**. 設某裝訂公司在一個 8 小時的輪班 (shift) 中可裝訂 10,000 本書且固定成本 (每個輪班) 爲 \$5,000. 若裝訂一本需 \$3. 試求裝訂 x 本的總成本.

<解> 令 $C(x)$ 爲裝訂 x 本的總成本. 根據題意, 當

$$x = 0$$

時, 不需要任何輪班及裝訂, 故總成本

$$C = 0$$

當

$$1 \le x \le 10000$$

時, 需要 1 個輪班及裝訂 x 本書, 故總成本

$$C = 5000(1) + 3x$$

當

$$10001 \le x \le 20000$$

時, 需要 2 個輪班及裝訂 x 本書, 故總成本

$$C = 5000(2) + 3x$$

當

$$20001 \le x \le 30000$$

時, 需要 3 個輪班及裝訂 x 本書, 故總成本

$$C = 5000(3) + 3x$$

以此類推, 可導出每超過一個 10,000 本書, 就要多一個輪班, 而造成固定成本增加 \$5,000. 因此, 根據前述列舉的情況, 可歸納出, 當 $x = 0, 1, 2, \ldots$ 時, 總成本

$$C(x) = 5000\left(1 + \left[\left[\frac{x-1}{10000}\right]\right]\right) + 3x$$

且圖形如下.

應用 2. **複利** (compound interest). 將利息加入本金 (deposit) 中, 一起生利息的方式, 稱作複利. 例如, 設本金爲 \$10,000, 年利率 (annual interest rate) 爲 6%, 且採用季複利 (compounded quarterly), 亦即, 每季 (3 個月) 期滿後, 計算利息, 並加入本金, 繼續生息, 則

$$\text{每季的利率} = \frac{0.06}{4} = 0.015$$

(因爲一年有四季), 且在第一季內的結餘爲

$$10,000$$

第二季內的結餘爲

$$10,000 + 10,000(0.015) = 10,000(1 + 0.015)$$

第三季內的結餘爲

$$\begin{aligned} & 10,000(1 + 0.015) + 10,000(1 + 0.015) \cdot \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (0.015) \\ = \; & 10,000(1 + 0.015)^2 \end{aligned}$$

第四季內的結餘爲

$$10,000(1 + 0.015)^3$$

第五季內的結餘爲

$$10,000(1+0.015)^4$$

$$\vdots$$

由此導出每滿 $\frac{1}{4}$ 年, 多計算一次利息並加入本金, 亦即, 多乘一次 $(1+0.015)$. 因此, 儲蓄 t 年後的結餘

$$A = 10,000(1+0.015)^{[[4t]]}$$

且圖形如下.

問. 跳躍 (jump) 的高度是多少? 均一樣嗎?