單元 8: 導函數及圖形的斜率
(課本 §2.1)

一. 圖形的切線 (tangent line to a graph)

(1) 直線: 如圖示, 在任一點 (x, y), 切線就是直線本身且斜率均相等. 共同的

$$斜率 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 變化率\ (或比率)$$

(2) 一般圖形: 如圖示, 在

(x_1, y_1) :切線較陡, 呈上升趨勢
(x_2, y_2) :切線較平緩, 呈上升趨勢
(x_3, y_3) :切線較平緩, 呈下降趨勢

均描述變化率.

問. 如何求切線? 根據點斜式, 此乃相當於如何求切線的斜率?

答. 如圖示, 困難處乃在於函數圖形上的切線只過圖形上的一點 $(x, f(x))$, 而通常需要兩點才能決定出斜率, 一

個可行的方法或是突破的方法乃是藉助於圖型上兩點所形成的割線, 加上極限, 而定義出切線的斜率. 這個觀念是微積分發展的一個關鍵, 也就是利用已知簡單情形的結論, 如割線斜率, 經由極限的處理, 而推導出新的結論, 如切線斜率.

首先, 考慮 x 附近的點 $x+\Delta x$ (Δx 爲一小的量, 可爲正亦可爲負), 則過函數圖形上兩點

$$(x, f(x)) \text{ 與 } (x+\Delta x, f(x+\Delta x))$$

的割線斜率

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

稱作差商 (difference quotient).

由圖示, 當 $\Delta x \to 0$ 時, 得

$$\text{割線} \to \text{切線}$$

因此, 定義圖形在點 (x, y) 上的切線的斜率

$$\begin{aligned} m &\overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} m_{\text{sec}} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

當極限存在時.

例 1. 令函數

$$f(x) = x^2 + 1$$

試求圖形在點 $(-1, 2)$ 及 $(2, 5)$ 上的斜率.

<解> 方法 1. 針對各點, 分別求斜率: 在點 $(-1, 2)$ 的斜率

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \cdots$$

且在點 $(2, 5)$ 的斜率

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \cdots$$

其中 $\cdots$ 的部分請同學自行完成.

方法 2. 先求斜率公式: 在任意點 (x, y) 上的斜率

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 1 - (x^2+1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) \\ &= 2x \end{aligned}$$

故, 將 $x=-1$ 代入, 得在點 $(-1,2)$ 的斜率

$$m=2(-1)=-2$$

以及將 $x=2$ 代入, 得在點 $(2,5)$ 的斜率

$$m=2(2)=4$$

註. $m=2x$ 也是一函數, 是函數 $f(x)$ 經由差商的極限過程所衍生出來的, 因此又稱爲函數 f 在 x 導函數 (derivative, 衍生物), 並記成 $f'(x)$, 亦即,

$$f'(x)=2x$$

定義. (1) 函數 f 在 x 的導函數 (derivative)

$$f'(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

當極限存在時.

(2) 若 $f'(x)$ 存在, 則稱函數 f 在 x 是可微的 (differentiable).

(3) 求導函數 $f'(x)$ 的過程稱作微分 (differentiation).

(4) 導函數表示法: 令 $y = f(x)$, 則

$$\frac{dy}{dx},\ y',\ \frac{d}{dx}[f(x)],\ f'(x)$$

均表示函數 f 在 x 的導函數.

例 2. 試求函數

$$f(x) = 3x^2 - 2x$$

的導函數.

<解> 根據定義, 導函數

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

又

$$\begin{aligned} & f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= 3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) - (3x^2 - 2x) \\ &= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2\Delta x \end{aligned}$$

代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x - 2) \\ &= 6x - 2 \end{aligned}$$

註. 可微性 (differentiability) 乃描述函數圖形的平滑性質, 不是每一函數均可微 (圖形平滑), 如下例.

(1) 函數

$$f(x) = x^{1/3}$$

在 $(0,0)$ 連續, 但在 $(0,0)$ 的切線爲一<u>鉛垂線</u>, 無斜率, 故不可微, 如圖示.

(2) 函數

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

在 $x = 0$ 未定義, 圖形呈現<u>斷開</u>的現象, <u>不連續</u>, 故不平滑, 在 $x = 0$ 不可微, 如圖示.

(3) 函數

$$f(x) = x^{2/3}$$

在 $(0,0)$ 連續, 但呈現出一個<u>尖點</u>, 切線爲一<u>鉛垂線</u>, 故不平滑, 在 $x = 0$ 無斜率, 不可微, 如圖示.

(4) 函數

$$f(x) = |x|$$

在 $(0,0)$ 連續, 但呈現出一個尖點, 切線不存在, 故不平滑, 不可微, 如圖示.

事實. 若函數 f 在 x 是可微的, 則函數 f 在 x 一定是連續的, 亦即,

$$\text{可微性} \Rightarrow \text{連續性}$$

但反過來就不一定成立, 也就是說, 若函數 f 在 x 連續, 則不一定能保證函數 f 在 x 是可微的 (有些時候是可微的, 但也有些時候是不可微的), 反例如上述的 (1), (3), (4), 它們均在 $(0,0)$ 連續, 但卻不可微.

因爲 "可微性" 保證 "連續性", 故與此事實等價的敍述爲 "若 f 在 x 不連續, 則 f 在 x 就一定不可微", 是一個常用來判斷不可微的方法, 如上述的 (2).