單元 9: 一些微分的規則
(課本 §2.2)

(1) 常數規則 (constant rule). 設 c 為一常數, 則

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

亦即, 常數函數的導函數恆為 0. 為何如此? 令

$$f(x) = c$$

則其圖形為一水平線, 如圖示, 得切線就是此水平線, 故

$$f'(x) = \text{切線斜率} = 0$$

或由定義,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃因為常數 0 的極限就是常數 0, 它自己.

(2) 冪次規則 (power rule). 設 n 為任一實數, 則

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

爲何如此? 僅說明 n 爲正整數的情形, 其它任意的 n 亦成立, 但省略說明. 令 n 爲一正整數, 且

$$f(x) = x^n$$

根據定義, 導函數

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \qquad (1) \end{aligned}$$

又, 根據二項展開式,

$$\begin{aligned} &(x+\Delta x)^n - x^n \\ &= x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 \\ &\qquad + \cdots + (\Delta x)^n - x^n \\ &= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 \\ &\qquad + \cdots + (\Delta x)^n \end{aligned}$$

代入 (1) 式並消去分子, 分母中的共同因式 Δx, 得

$$\begin{aligned} &f'(x) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \Big(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x) \\ &\qquad + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \Big) \\ &= nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0 \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃因爲第一項對 Δx 而言爲一個常數, 之後的每一項都含有因式 Δx, 故當 $\Delta x \to 0$ 時, 得出常數的極限就是常數本身, 而其它各項在乘上了極限 0 以後, 均變成了 0.

(3) 常數乘法規則 (constant multiple rule). 設 c 爲一常數且 f 爲可微, 則

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

亦即, 可提出常數.

(4) 加減規則 (sum and difference rule). 設 f 與 g 均可微, 則

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

亦即, 可逐項微分.

例 1. 試求下列各函數的導函數.

(a) $g(t) = \dfrac{4t^{1/2}}{5}$

(b) $y = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$

(c) $y = \dfrac{5}{(2x)^3}$

(d) $f(x) = 2\pi + \sqrt{2x} + (5x)^2 + 3x^{5/2}$

<解> 解題技巧: 將各項均改寫成 cx^n 的型式後, 再根據上述的規則微分.

(a) 首先, $g(t)$ 可改寫成

$$g(t) = \frac{4}{5}t^{1/2}$$

故根據常數乘法規則以及冪次規則,

$$g'(t) = \frac{4}{5}\frac{d}{dt}[t^{1/2}] = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)t^{1/2-1} = \frac{2}{5}t^{-1/2}$$

(b) 經由改寫, 得

$$y = \frac{1}{2}x^{-2/3}$$

故根據常數乘法規則及冪次規則,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[x^{-2/3}] \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-2/3-1} = -\frac{1}{3}x^{-5/3} \end{aligned}$$

(c) 改寫後, 得

$$y = \frac{5}{8}x^{-3}$$

故根據常數乘法規則及冪次規則,

$$y' = \frac{5}{8}(-3)x^{-4} = -\frac{15}{8}x^{-4}$$

(d) 經由改寫, 得

$$f(x) = 2\pi + \sqrt{2}x^{1/2} + 25x^2 + 3x^{5/2}$$

故, 首先根據加減規則在逐項微分下, 再根據其它三個規則, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 + \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)x^{1/2-1} + 25(2)x^{2-1} \\ &\qquad + 3\left(\frac{5}{2}\right)x^{5/2-1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}x^{-1/2} + 50x + \frac{15}{2}x^{3/2} \end{aligned}$$

例 2. 試求

$$g(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}}$$

的導函數.

<解> 即使以後學了有關除法的微分規則後, 在分母只有單一一項的情況下, 利用分配律將每項改寫成 cx^n 的型式後, 會簡化許多求導函數的過程. 故, 首先根據分配律, 可將 $g(x)$ 改寫成

$$g(x) = 2x^{3/2} - 3x^{1/2} + 5x^{-1/2}$$

接著, 根據上述的微分規則, 在逐項微分下, 得

$$g'(x) = 3x^{1/2} - \frac{3}{2}x^{-1/2} - \frac{5}{2}x^{-3/2}$$

例 3. 試求

$$h(x) = (x-1)(x^2 + \sqrt{x} - 2)$$

的導函數.

<解> 在還未學習有關乘法的微分規則下, 一個可行的方法是將原函數展開並將每一項寫成 cx^n 的型式, 特別是在容易乘開的情況下, 此方法比直接使用乘法規則求導函數要來得簡潔. 故展開得

$$h(x) = x^3 - x^2 + x^{3/2} - x^{1/2} - 2x + 2$$

因此,

$$h'(x) = 3x^2 - 2x + \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} - 2$$