1. 根據連鎖法則以及 tan 函數的微分公式,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2\cdot 3\tan^2 4x\cdot\sec^2 4x\cdot 4\\ &= 24\tan^2(4x)\sec^2(4x)\end{aligned}$$

2. 首先, 根據連鎖法則以及 ln 與 sec 函數的微分公式,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec x\tan x}{\sec x-1}$$

代入 $x=\frac{\pi}{3}$, 得斜率

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}}=\frac{\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)-1}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2-1}=2\sqrt{3}$$

最後, 根據點斜式, 得切線

$$y=2\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

3. 首先, 兩邊對 x 微分, 視 y 爲 x 的函數, 並根據連鎖法則以及 sin 與 cos 函數的微分公式, 得

$$-\sin x+\cos 2y\cdot 2\frac{dy}{dx}=0$$

接著, 解 $\frac{dy}{dx}$, 得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{2\cos 2y}$$

4．首先，找臨界數，即相對極值候選數．根據乘法規則與指數函數和 sin 函數的微分公式，得

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \\ &= e^{-x}(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

在實數線上恆定義．故令 $f'(x) = 0$ 亦相當於

$$\cos x - \sin x = 0$$

得出在 $(0, 2\pi)$ 內的第一類臨界數

$$x = \frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}$$

接著，此二臨界數將 $(0, 2\pi)$ 分割成三個子區間，且一階導函數 $f'(x)$ 在每個子區間內的符號如下述及圖示．

$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$: $f' = (\text{大}) - (\text{小}) = (+)$，遞增

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$: $f' = (\text{小}) - (\text{大}) = (-)$，遞減

$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$: $f' = (\text{大}) - (\text{小}) = (+)$，遞增

因此，根據一階導函數檢定法，在 $x = \frac{\pi}{4}$ 有相對極大值

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\pi/4}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}$$

且在 $x = \frac{5\pi}{4}$ 有相對極小值

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{-5\pi/4}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-5\pi/4}$$