

單元 33: 面積與微積分基本定理 (課本 §5.4)

設在閉區間 $[a, b]$ 上, 函數 $f(x) \geq 0$, 且 R 為 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上所圍成的區域, 如下圖, 則將 R 的面積以數學式

$$\int_a^b f(x)dx$$

表示, 亦即,

$$R \text{ 的面積} = \int_a^b f(x)dx$$

並稱此數學式

$$\int_a^b f(x)dx$$

為 $f(x)$ 由 a 到 b 的定積分 (definite integral), 其中 a 為積分下界 (lower limit of integration), b 為積分上界 (upper limit of integration).

註. 不定積分與定積分之間的差異.

不定積分 (indefinite integral): 若

$$F'(x) = f(x)$$

亦即, $F(x)$ 爲 $f(x)$ 的一個反導函數, 則不定積分

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

乃 $f(x)$ 的反導函數家族.

定積分 (definite integral): 若 $f(x) \geq 0$, 則定積分

$$\int_a^b f(x)dx = f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上所圍成}$$

區域 R 的面積

乃一實數.

問. 不定積分與定積分之間有何關係?

答. 由下述的微積分定理 (Fundamental Theorem of Calculus, FTC) 表現出.

令 $x \in [a, b]$. 定義

$$A(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \text{ 由 } a \text{ 到 } x \text{ 所圍出區域的面積}$$

如圖示.

將 x 增加 Δx , 則面積變化量

$$\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)$$

如圖示.

令

$$f(m) = f \text{ 在 } [x, x + \Delta x] \text{ 上的最小值}$$

且

$$f(M) = f \text{ 在 } [x, x + \Delta x] \text{ 上的最大值}$$

則在 $[x, x + \Delta x]$ 上, "以 $f(m)$ 爲高的長方形" 會落在 " $f(x)$ 所圍出的區域" 內, 且 " $f(x)$ 所圍出的區域" 亦會落在 "以 $f(M)$ 爲高的長方形" 內, 如圖示, 以及對應的面積爲

$$\text{小長方形面積} \leq \text{區域面積} \leq \text{大長方形面積}$$

亦即,

$$f(m)\Delta x \leq \Delta A \leq f(M)\Delta x$$

同除 Δx , 得

$$f(m) \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq f(M)$$

同取 $\Delta x \rightarrow 0$ 的極限, 由上式可導出

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(m) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(M)$$

因為當 $\Delta x \rightarrow 0$, 由圖示知,

$$f(m) = f(x) = f(M)$$

並根據導函數的定義以及極限的不等式, 上式亦相當於

$$f(x) \leq A'(x) \leq f(x)$$

故,

$$f(x) = A'(x)$$

亦即, $A(x)$ 為 $f(x)$ 的一個反導函數.

因為 $F(x)$ 也是 $f(x)$ 的一個反導函數, 且反導函數間只差一個常數, 故

$$A(x) = F(x) + C \quad (1)$$

又

$$\begin{aligned} A(a) &= f(x) \text{ 由 } a \text{ 到 } a \text{ 所圍出區域的面積} \\ &= 0 \end{aligned}$$

代入 (1) 式, 得

$$0 = A(a) = F(a) + C$$

亦即,

$$C = -F(a)$$

因此, 再由 (1) 式,

$$A(x) = F(x) - F(a) \quad (2)$$

最後, 根據 $A(b)$ 的定義, 以及面積的定積分表示法, 並將 b 代入 (2) 式, 得

$$\begin{aligned} A(b) &= f(x) \text{ 由 } a \text{ 到 } b \text{ 所圍出區域的面積} \\ &= \int_a^b f(x) dx \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

結論. 微積分基本定理. 若不定積分

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

亦即,

$$F'(x) = f(x)$$

或 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的一個反導函數, 則定積分

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

也就是說, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定積分, 或所圍出區域的面積 (當 $f(x) \geq 0$ 時), 就等於 $f(x)$ 的不定積分, 或一個反導函數, 在 b 與 a 值的差.

例 1 試求下列各項定積分.

(a) $\int_0^2 2x dx$

(b) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$

<解> (a) 方法 1: 面積的觀點. 因為在 $[0, 2]$ 上,

$$y = 2x \geq 0$$

故定積分

$$\begin{aligned} \int_0^2 2x dx &= \text{底爲 } 2, \text{ 高爲 } 4 \text{ 的直角三角形} \\ &\quad \text{面積, 如圖示} \\ &= \frac{1}{2}(2)(4) = 4 \end{aligned}$$

方法 2: FTC 的觀點. 先求不定積分, 得

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

接著, 取

$$F(x) = x^2$$

並根據微積分基本定理, 定積分

$$\begin{aligned}\int_0^2 2x dx &= F(2) - F(0) \\ &= (2)^2 - (0)^2 = 4\end{aligned}$$

與方法 1 的結果相符.

(b) 因為在 $[0, 2]$ 上,

$$y = \sqrt{4 - x^2} \geq 0$$

且經由平方, 乃相當於

$$y^2 = 4 - x^2, \quad x \in [0, 2], \quad y \geq 0$$

亦即,

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x \in [0, 2], \quad y \geq 0$$

故為一個以 $(0, 0)$ 為圓心, 半徑為 2 的四分之一圓, 如圖示.

令 R 為此四分之一圓在 $[0, 2]$ 上所圍出的區域, 則定積分

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx &= R \text{ 的面積} \\ &= \frac{1}{4}\pi(2)^2 = \pi\end{aligned}$$

註. 此題無法以 FTC 的觀點求定積分, 因為至目前為止無法求得不定積分

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx$$

事實上, 需以反三角函數的積分法求此不定積分, 這是超出本書的範圍, 故僅於下學期以查表的方式介紹此不定積分的結果.

註 1. 微積分基本定理的推廣. 設函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上連續 (不一定要大於或等於 0), 且

$$F'(x) = f(x)$$

亦即, $F(x)$ 為 $f(x)$ 的不定積分或反導函數, 則定積分

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

此時定積分

$$\int_a^b f(x) dx$$

可為一正數, 負數, 或 0, 所以不一定代表 f 所圍出區域的面積.

注意, 只有當 $f(x) \geq 0$ 時, 定積分

$$\int_a^b f(x) dx = \text{所圍出區域的面積}$$

註 2. 簡易表示法: 若

$$F'(x) = f(x)$$

則定積分

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

例 2. 式求下列各項定積分.

(a) $\int_0^{\sqrt{3}} x e^{x^2} dx$

(b) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

(c) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} dx$

(d) $\int_0^2 |2x-1| dx$

<解> 因為被積函數均為連續函數, 故根據微積分基本定理, 需先以型式辨識或代入法求出不定積分, 再計算此不

定積分在積分上下界的值的差, 如下述. (a) 因為被積函數中的合成函數為

$$e^{x^2}$$

故令

$$u = x^2$$

得

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

再經由同乘除 2, 相關的積分規則, 以及註 2 的簡易表示法, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \underbrace{e^{x^2}}_{e^u} \underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{(\sqrt{3})^2} - e^{(0)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} (e^3 - 1) \end{aligned}$$

注意! 在第二個等號的右邊一定要將不定積分表成 x 後, 才可代入積分的上下界, 而求出正確的定積分, 此乃因為

積分的上下界乃是 x 的範圍, 不是 u 的範圍, 只能代入以 x 表示的不定積分內, 切勿犯如下的錯誤,

$$\begin{aligned}\text{原式} &\neq \frac{1}{2}e^u \Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &\neq \frac{1}{2}(e^{\sqrt{3}} - e^0) \\ &\neq \frac{1}{2}(e^{\sqrt{3}} - 1)\end{aligned}$$

(b) 因為被積函數中含有 $\ln x$ 與 $\frac{1}{x}$, 故根據積分的經驗, 令

$$u = \ln x$$

得

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

再經由適當的改寫, 以及型式辨識或代入法, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_e^{e^2} \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\frac{1}{u}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \ln |\ln x| \Big|_e^{e^2} \\ &= \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2 - \ln 1 \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

(c) 顯然地, 被積函數中的合成函數為

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$$

故令

$$u = 1 + 2x^2$$

得

$$\frac{du}{dx} = 4x$$

剛好是被積函數其餘部份 x 的 4 倍.

因此, 經由同乘除 4, 型式辨識, 以及相關的積分規則, 並將不定積分表成 x 的數學式子後, 再代入積分上下界, 則可得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{4} \int_0^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}}_{\frac{1}{\sqrt{u}}} \underbrace{(4x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 \sqrt{1+2x^2} \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{9} - \sqrt{1}) = \frac{1}{2}(3 - 1) = 1\end{aligned}$$

(d) 方法 1: FTC 的觀點. 因為所介紹的積分公式中的被積函數均未含有絕對值符號, 故需先以明確的數學式表

示出被積函數後,再根據各自數學式所對應的範圍,分段地計算出定積分的和,如下述.

首先,

$$|2x - 1| = \begin{cases} 1 - 2x, & x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

接著,根據 $|2x - 1|$ 在上式 $\frac{1}{2}$ 左右兩邊不同的表示式,將原積分範圍 $[0, 2]$, 分割成兩段 $[0, \frac{1}{2}]$ 與 $[\frac{1}{2}, 2]$, 並分別求在各段上去絕對值符號後的定積分的和, 而得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{1/2} |2x - 1| dx + \int_{1/2}^2 |2x - 1| dx \\ &= \int_0^{1/2} (1 - 2x) dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1) dx \\ &= \left(x - x^2 \Big|_0^{1/2} \right) + \left(x^2 - x \Big|_{1/2}^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{4} - 0 \right) + \left[2 - \left(-\frac{1}{4} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

方法 2: 面積的觀點. 因為被積函數

$$|2x - 1| \geq 0$$

故定積分

$$\begin{aligned}\int_0^2 |2x - 1| dx &= \text{在 } [0, 2] \text{ 上所圍出的兩個三角形} \\ &\quad \text{的面積和, 如圖示} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) (1) + \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) (3) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

與方法 1 的結果相符. 不強制使用某特定的方法, 可根據題目靈活的運用便於求解的方法, 但需謹記只有在被積函數為非負時, 定積分才可表示成所圍出區域的面積.

應用 1: 邊際分析 (marginal analysis). 已知收益 $R(x)$, 問銷售量由 x_1 到 x_2 時, 收益的變化為何?

將銷售量代入收益, 得收益的變化為

$$R(x_2) - R(x_1)$$

若收益 $R(x)$ 未知, 但已知變際收益 (marginal revenue) $\frac{dR}{dx}$, 如何回答上述問題?

因為收益 $R(x)$ 是邊際收益 $\frac{dR}{dx}$ 的一個反導函數, 故由微積分基本定理, 邊際收益的定積分

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dR}{dx} dx = R(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = R(x_2) - R(x_1)$$

剛好就是收益的變化, 如所求.

同理, 邊際利潤的定積分

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dP}{dx} dx = P(x_2) - P(x_1)$$

就是利潤的變化, 且邊際成本的定積分

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dC}{dx} dx = C(x_2) - C(x_1)$$

就是成本的變化.

例 3. 設邊際利潤

$$\frac{dP}{dx} = -0.0005x + 12.2$$

試求當銷售量由 100 件增至 110 件時的利潤變化量.

<解> 根據上述的應用 1, 利潤變化量

$$\begin{aligned} P(110) - P(100) &= \int_{100}^{110} \frac{dP}{dx} dx \\ &= \int_{100}^{110} (-0.0005x + 12.2) dx \\ &= -\frac{1}{2}(0.0005)x^2 + 12.2x \Big|_{100}^{110} \\ &= [-0.00025(110)^2 + 12.2(110)] - \\ &\quad [-0.00025(100)^2 + 12.2(100)] \approx 121.48 \end{aligned}$$

應用 2: 平均值 (average value). 設函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上連續, 則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的

$$\text{平均值} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

為何如此? 簡單說明如下, 設 a 與 b 為整數, $f(x) \geq 0$, 且在 $[a, b]$ 上分割出 $(b-a)$ 個寬度為 1, $f(x)$ 在子區間左端點的值為高的長方條, 如圖示. 則根據定積分的面積觀點, 定積分

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \text{圍出區域的面積} \\ &\approx (b-a) \text{ 個長方條面積和} \\ &= f(a) + f(a+1) + \cdots + f(b-1) \end{aligned}$$

接著, 將上式同除 $(b-a)$, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &\approx \frac{1}{b-a} [f(a) + f(a+1) + \cdots + f(b-1)] \\ &= (b-a) \text{ 個 } f \text{ 值的平均值} \end{aligned}$$

故稱

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

爲 f 在 $[a, b]$ 上的平均值.

例 4. 設函數

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

試求 f 在 $[1, 3]$ 上的平均值.

<解> 根據函數在閉區間上的平均值定義, 微積分基本定理, 以及簡單積分對數律,

$$\begin{aligned}\text{平均值} &= \frac{1}{3-1} \int_1^3 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln x \Big|_1^3 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 3\end{aligned}$$

應用 3: 偶函數 (even function). 對稱於 y -軸的函數 f , 稱爲偶函數, 若且爲若

$$f(-x) = f(x)$$

如圖示. 性質爲, 對於 $a \geq 0$,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

例如, 函數

$$f(x) = x^2$$

爲偶函數, 因爲

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

故根據定義, 確實爲一偶函數, 如圖示.

又

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 x^2 dx &= \left. \frac{1}{3}x^3 \right|_{-2}^2 \\ &= \frac{1}{3}[2^3 - (-2)^3] \\ &= \frac{1}{3}(8 + 8) \\ &= \frac{16}{3}\end{aligned}$$

且

$$\int_0^2 x^2 dx = \left. \frac{1}{3}x^3 \right|_0^2 = \frac{8}{3}$$

故得

$$\int_{-2}^2 x^2 dx = 2 \int_0^2 x^2 dx$$

如性質所述.

應用 4: 奇函數 (odd function). 對稱於原點的函數 f , 稱為奇函數, 若且為若

$$f(-x) = -f(x)$$

如圖示. 性質為, 對於 $a \geq 0$,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

例如, 函數

$$f(x) = x^3$$

為奇函數, 因為

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

故根據定義, 確實為一奇函數, 如圖示.

又

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 x^3 dx &= \left. \frac{1}{4}x^4 \right|_{-2}^2 \\ &= \frac{1}{4}[2^4 - (-2)^4] \\ &= \frac{1}{4}(16 - 16) \\ &= 0\end{aligned}$$

如性質所述.