單元 34: 由二圖形所圍出區域的面積
(課本 §5.5)

一. 二函數圖形所圍出區域的面積

令函數 f 與 g 在 $[a,b]$ 上連續, 且對所有的 $x \in [a,b]$,

$$f(x) \geq g(x)$$

則在 $[a,b]$ 上由 f 與 g 所圍成的區域

$$R \text{ 的面積} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

亦即,

$$R \text{ 的面積} = \int_a^b [\text{上函數} - \text{下函數}]dx \qquad (1)$$

如圖示.

爲何如此? 考慮特例. 設在 $[a,b]$ 上, f 與 g 均大於或等於 0, 且圖形如下, 則根據圖示, 非負函數定積分的面積觀點, 以及積分的加減規則,

$$\begin{aligned} R \text{ 的面積} &= \text{由 } f \text{ 所圍出的區域面積} - \\ &\qquad\qquad \text{由 } g \text{ 所圍出的區域面積} \\ &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \end{aligned}$$

如所求. 其它情況, 亦成立 (略).

例 1. 令 R 爲

$$y = x^2 + 2$$

與

$$y = x$$

在 $[0,1]$ 上所圍成的區域. 試求 R 的面積.

<解> (i) 繪圖求上, 下函數. 如圖示, 得

$$\text{上函數: } y = x^2 + 2$$

且

$$\text{下函數: } y = x$$

(ii) 根據 (1) 式, 所圍出區域

$$\begin{aligned} R \text{ 的面積} &= \int_0^1 [(x^2+2) - x]dx \\ &= \left. \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{2}x^2 \right|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2}\right) - 0 \\ &= \frac{11}{6} \end{aligned}$$

例 2. 試求由

$$y = 2 - x^2$$

與

$$y = x$$

所圍出區域的面積.

<解> 與上例最大的不同乃是, 未明確地給出所圍出區域的 x 範圍, 亦即, 定積分的上下界 a 與 b, 故需先由二圖形的交點求出積分的上下界, 再確定上下函數, 並根據所圍出區域面積的積分公式求面積, 如下述.

(i) 求交點決定積分的上下界. 令兩函數的 y 值相等, 亦即

$$2 - x^2 = x$$

並解 x. 移項整理, 得

$$x^2 + x - 2 = 0$$

經由因式分解, 得

$$(x+2)(x-1) = 0$$

故

$$x = -2,\ 1$$

(ii) 決定上下函數. (a) 繪圖: 根據上述求得兩交點的 x 坐標, 以及一爲開口向下的拋物線, 另一爲直線, 得圖形如下, 故

$$\text{上函數: } y = 2 - x^2$$

且

$$\text{下函數: } y = x$$

或 (b) 比較法: 選 (i) 中求得的積分範圍 $[-2, 1]$ 內的任一點, 代入二函數求值, 並比較它們的大小, 大的爲上函數, 小的爲下函數. 例如, 選 $x = 0$ 代入, 得

$$y = 2 - x^2\Big|_{x=0} = 2$$

以及

$$y = x\Big|_{x=0} = 0$$

故

$$\text{上函數: } y = 2 - x^2$$

且

$$\text{下函數: } y = x$$

(iii) 根據 (i) 與 (ii), 以及所圍出區域的面積公式,

$$R \text{ 的面積} \;=\; \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]dx$$

最後, 根據微積分基本定理, 由上式得

$$
\begin{aligned}
R \text{ 的面積} &= 2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-2}^{1} \\
&= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) \\
&= 8 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

例 3. 令 R 爲

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$$

與

$$g(x) = -x^2 + 2x$$

所圍出的區域. 試求 R 的面積.

<解> 同上例, (i) 求交點決定積分的上下界. 令

$$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$$

並解 x. 經移項整理並因式分解, 得

$$3x^3 - 12x = 0$$

以及

$$3x(x^2 - 4) = 0$$

故

$$x = 0,\ -2,\ 2$$

(ii) 決定上下函數. (a) 繪圖: 根據 (i) 中所求得的三個交點, 一爲三次多項式所表現出的由負無窮大到正無窮大的曲線, 另一爲開口向下的拋物線, 得圖形如下, 故在 $[-2,0]$ 上,

$$\text{上函數: } f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$$

且

$$\text{下函數: } g(x) = -x^2 + 2x$$

但在 $[0,2]$ 上,

$$\text{上函數: } g(x) = -x^2 + 2x$$

且

$$\text{下函數: } f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$$

或 (b) 代入比較法: 在 $[-2,0]$ 內, 選 $x = -1$ 代入, 得

$$f(-1) = -3 - 1 + 10 = 6$$

且

$$g(-1) = -1 - 2 = -3$$

故

$$\text{上函數: } f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$$

以及

$$\text{下函數: } g(x) = -x^2 + 2x$$

另在 $[0,2]$ 內, 選 $x = 1$ 代入, 得

$$f(1) = 3 - 1 - 10 = -8$$

且

$$g(1) = -1 + 2 = 1$$

故

$$\text{上函數: } g(x) = -x^2 + 2x$$

以及

$$\text{下函數: } f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$$

注意! 此例顯示出, 在不同的區間上, 可能有不同的上下函數, 所以正確地確認是必要的.

(iii) 根據圖示, 區域 R 爲 R_1 與 R_2 的聯集, 故由 (i) 與 (ii) 的結論, 以及所圍出區域的面積公式, 得

$$\begin{aligned} R \text{ 的面積} &= R_1 \text{ 的面積} + R_2 \text{ 的面積} \\ &= \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]dx + \\ &\qquad \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]dx \end{aligned}$$

又上式中的兩個被積函數僅差一負號, 故代入

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (3x^3-x^2-10x)-(-x^2+2x) \\ &= 3x^3-12x \end{aligned}$$

並根據微積分基本定理, 得

$$\begin{aligned} R \text{ 的面積} &= \int_{-2}^{0}(3x^3-12x)dx+ \\ &\qquad \int_{0}^{2}(12x-3x^3)dx \\ &= \left(\frac{3}{4}x^4-6x^2\Big|_{-2}^{0}\right)+\left(6x^2-\frac{3}{4}x^4\Big|_{0}^{2}\right) \\ &= [0-(12-24)]+[(24-12)-0] \\ &= 12+12=24 \end{aligned}$$

二. 應用

需求函數 (demand function)

$$p=D(x)$$

乃是由消費者的需求所反應出的產品售價, 故爲產品數量 x 的遞減函數.

供給函數 (supply function)

$$p=S(x)$$

乃是由生產者的提供 (或生產) 意願所反應出的產品售價, 故爲產品數量 x 的遞增函數.

供需平衡點 (point of equilibrium)

$$(x_0, p_0)$$

爲需求函數 $p = D(x)$ 與供給函數 $p = S(x)$ 的交點, 亦即, p_0 爲消費者與生產者分別願意購買與生產 x_0 件產品時的產品售價, 如圖示.

因此, 定義

$$\text{消費者剩餘} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{x_0} [\text{需求函數} - p_0]\,dx$$

以及

$$\text{生產者剩餘} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{x_0} [p_0 - \text{供給函數}]\,dx$$

乃分別表示在供需平衡點 (x_0, p_0) 時, 消費者與生產者各自的獲益, 如圖示.

例 4. 設某產品的需求函數爲

$$p = -0.36x + 9$$

且供給函數爲

$$p = 0.14x + 2$$

試求消費者剩餘以及生產者剩餘.

<解> 根據消費者剩餘與生產者剩餘的定義, 需先求供需平衡點, 亦即, 需求函數與供給函數的交點, 故令二函數的售價相等, 也就是說,

$$-0.36x + 9 = 0.14x + 2$$

並解 x. 經由移項整理, 得

$$0.5x = 7$$

故

$$x = \frac{7}{0.5} = 14$$

以及

$$p = (0.14)(14) + 2 = 1.96 + 2 = 3.96$$

因此, 供需平衡點為 $(14, 3.96)$.

接著, 根據定義以及微積分基本定理,

$$\begin{aligned}
\text{消費者剩餘} &= \int_0^{14} [(-0.36x + 9) - 3.96]dx \\
&= \int_0^{14} (-0.36x + 5.04)dx \\
&= -0.18x^2 + 5.04x\Big|_0^{14} \\
&= -0.18(14)^2 + 5.04(14) = 35.28
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
\text{生產者剩餘} &= \int_0^{14}[3.96-(0.14x+2)]dx \\
&= \int_0^{14}(1.96-0.14x)dx \\
&= 1.96x-0.07x^2\Big|_0^{14} \\
&= 1.96(14)-0.07(14)^2 = 13.72
\end{aligned}$$