單元 4: 平面上的直線與斜率
(課本 §1.3)

一. 線性方程式 (Linear Equation)

圖形爲一直線的方程式稱爲線性方程式. 常用的二種型式如下述.

1. 斜截式 (slope-intercept form)

$$y = mx + b$$

其中 m 稱作斜率, b 爲 y-截距, 如圖示. $m > 0$ 表示, x 的量增加一個單位時, y 的值會增加 m 個單位, 故圖形呈現上升的趨勢; $m < 0$ 表示, 當 x 的量增加一個單位時, y 的值會減少 $|m|$ 個單位, 故圖形呈現出下降的趨勢; $m = 0$ 表示, 無論 x 是如何的改變, y 的值恆爲 b, 圖形呈現出無變化的趨勢, 而爲一條水平線, 如圖示.

註 1. 鉛垂線

$$x = a$$

無法以斜截式表示, 因爲不定義鉛垂線的斜率 (slope undefined), 如圖示.

註 2. 在實際生活中, 斜率有下述的兩種涵義.

(1) x-軸與 y-軸有相同的度量單位時,

$$\text{斜率} = \text{比率 (ratio)}$$

乃一無單位的量, 如下圖的斜坡,

$$\text{斜率} = \frac{22 \text{ 吋}}{(24)(12) \text{ 吋}} \approx 0.076$$

表示陡的程度.

(2) x-軸與 y-軸的度量單位不同時,

$$\text{斜率} = \text{變化率 (rate of change, 簡稱 rate)}$$

表示 y-軸的量隨著 x-軸的量而改變的程度, 其單位爲 “y 的單位/x 的單位”, 如總成本爲

$$C = 25x + 3500$$

如圖示, 其中 x-軸的單位爲 “件”, y-軸的單位爲 “元”, 則

$$\text{斜率} = 25\text{元/件}$$

表示每多生產一件物品, 所需的成本爲 \$25. 經濟學上, 稱

$$\text{斜率} = 25\text{元/件}$$

爲邊際成本 (marginal cost), 亦即, 每多生產一件產品所需的成本.

註 3. 過二點 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線的斜率

$$m \overset{\text{def}}{=} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \overset{\text{簡記}}{=} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

其中

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

表示 y 的變化量 (change in y), 且

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

表示 x 的變化量 (change in x), 如圖示.

2. 點斜式 (point-slope form)

過點 (x_1, y_1) 且斜率爲 m 的直線爲

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

如圖示.

例 1. 設高露潔 (Colgate) 在 1992 年與 1996 年的股價分別爲 \$21.87 與 \$29.73. 試以一線性方程式描述股價變動的情形.

<解> 爲方便計, 以 1990 年爲基準, 將年份平移, 也就是說, $t = 0$ 相當於 1990 年, 則得圖形如下. 由此, 斜率

$$m = \frac{29.73 - 21.87}{6 - 2} \approx 1.97$$

根據點斜式, 得

$$S - 21.87 = 1.97(t - 2),\ 2 \leq t \leq 6$$

亦相當於

$$S = 1.97t + 17.93,\ 2 \leq t \leq 6$$

故可以此線性模型來估計 1993 年, 1994 年, 與 1995 年的股價如下:

1993 年相當於 $t = 3$, 故 1993 年的股價

$$S = 1.97(3) + 17.93 = 23.84$$

1994 年相當於 $t = 4$, 故 1994 年的股價

$$S = 1.97(4) + 17.93 = 25.81$$

1995 年相當於 $t = 5$, 故 1995 年的股價

$$S = 1.97(5) + 17.93 = 27.78$$

此種估計法稱作線性內插法 (linear interpolation), 因爲欲估計的點是介於給定的點之內, 如圖示. 若欲估計的點是在給定的點之外, 則稱爲線性外差法 (linear extrapolation), 如圖示.

二. 平行線 (Parallel Lines)

二相異的非鉛垂線互爲平行 (parallel) 若且爲若它們有相同的斜率, 亦即,

$$m_1 = m_2$$

其中 m_1 與 m_2 分別爲此二直線的斜率.

三. 垂直線 (Perpendicular Lines)

二相異的非鉛垂線互爲垂直 (perpendicular) 若且爲若二斜率互爲負顛倒數 (negative reciprocal), 亦即,

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

或

$$m_1 m_2 = -1$$

其中 m_1 與 m_2 分別爲此二直線的的斜率.

例 2. 試求過點 $(2,-1)$ 且與

$$2x-3y=5$$

平行以及垂直的二直線.

<解> 將

$$2x-3y=5$$

表示成斜截式, 得

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$$

故此直線的斜率

$$m=\frac{2}{3}$$

根據平行線的定義, 與此直線平行的直線斜率

$$m=\frac{2}{3}$$

且過點 $(2,-1)$, 故由點斜式, 得平行線爲

$$y+1=\frac{2}{3}(x-2)$$

亦相當於

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$$

接著, 根據垂直線的定義, 與此直線垂直的直線斜率

$$m = -\frac{3}{2}$$

且過點 $(2, -1)$, 故由點斜式, 得垂直線爲

$$y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 2)$$

亦即,

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

如圖示.

四. 線性折舊 (linear depreciation)

在使用年限中, 若物品每年的折舊價 (或貶値額) 均相同時, 則稱爲線性折舊.

例 3. 設某機器以 \$12,000 買進且使用年限爲 8 年. 設在 8 年後, 其殘餘値 (salvage value) 爲 \$2,000. 試以一線形模型描述此機器在每年後的剩餘價値 (nondepreciated value).

<解> 令 $V(t)$ 爲此機器在 t 年後的價値. 由題意,

$$V(0) = 12000, \; V(8) = 2000$$

由線形模型的假設, 知

$$\text{年折舊價} = \text{斜率} = \frac{2000-12000}{8-0} = -1250$$

故由點斜式, 得

$$V(t) - 12000 = -1250(t-0)$$

亦即,

$$V(t) = -1250t + 12000$$

因此, 在每年底的剩餘價值如下表:

t	0	1	2	3	4
V	12000	10750	9500	8250	7000
t	5	6	7	8	
V	5750	4500	3250	2000	