

## 單元 61: 微分方程式的解

(課本 §C.1)

定義. (1) 一微分方程式 (differential equation) 爲一含有可微函數  $y$  及其導函數的方程式.

(2) 函數  $y = f(x)$  稱作一微分方程式的解若且爲若  $f(x)$  及其對應的導函數滿足原方程式, 意即將  $f(x)$  與所對應的  $f(x)$  的導函數代入方程式後, 原式成立.

例如,

$$y' + 2y = 0 \quad (1)$$

爲一個微分方程式, 且

$$y = e^{-2x}$$

是一個解.

爲何如此? 首先, 將  $y$  對  $x$  微分, 得

$$y' = -2e^{-2x}$$

並代入 (1) 式, 可導出

$$\begin{aligned} y' + 2y &= -2e^{-2x} + 2(e^{-2x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

原式成立, 故根據定義,

$$y = e^{-2x}$$

爲 (1) 式的解.

同理,

$$y = 2e^{-2x}$$

與

$$y = -3e^{-2x}$$

以及

$$y = 5e^{-2x}$$

也是微分方程式

$$y' + 2y = 0$$

的解, 舉例, 因爲代入

$$y = -3e^{-2x}$$

以及

$$y' = (-3)(-2e^{-2x}) = 6e^{-2x}$$

得

$$\begin{aligned} y' + 2y &= 6e^{-2x} + 2(-3e^{-2x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

原式成立. 請自行驗證其餘的兩個解.

事實上, 對任意的實數  $C$ ,

$$y = Ce^{-2x}$$

都是

$$y' + 2y = 0$$

的解. 為何如此? 因為

$$y' = Ce^{-2x}(-2) = -2Ce^{-2x}$$

且代入後, 得

$$\begin{aligned}y' + 2y &= -2Ce^{-2x} + 2(Ce^{-2x}) \\ &= 0\end{aligned}$$

原式成立.

註. 稱此種解

$$y = Ce^{-2x}$$

為微分方程式

$$y' + 2y = 0$$

的一般解 (general solutions), 乃一解的家族 (a family of solutions).

## 例 1. 試證

$$y = Ce^x$$

與

$$y = Ce^{-x}$$

均是微分方程式

$$y'' - y = 0$$

的一般解.

<證> 因為微分方程式內含有二階導函數, 故需將

$$y = Ce^x$$

連續微分兩次, 得

$$y' = Ce^x$$

以及

$$y'' = Ce^x$$

代入後, 可導出

$$y'' - y = Ce^x - Ce^x = 0$$

原式成立. 故

$$y = Ce^x$$

是一個一般解.

同理, 將

$$y = Ce^{-x}$$

連續微分兩次, 得

$$y' = Ce^{-x}(-1) = -Ce^{-x}$$

以及

$$y'' = -Ce^{-x}(-1) = Ce^{-x}$$

接著, 將  $y$  與  $y''$  代入, 得

$$y'' - y = Ce^{-x} - Ce^{-x} = 0$$

原式成立. 因此,

$$y = Ce^{-x}$$

也是一個一般解.

定義. 特殊解 (particular solution) 乃是根據某一給定的初始條件 (initial condition) 將一般解中的未定常數  $C$  決定後的解.

例如, 考慮微分方程式

$$xy' - 2y = 0$$

則一般解爲

$$y = Cx^2$$

此乃因爲

$$y' = 2Cx$$

且代入後, 得

$$\begin{aligned} xy' - 2y &= x(2Cx) - 2(Cx^2) \\ &= 2Cx^2 - 2Cx^2 = 0 \end{aligned}$$

原式成立. 因此,

$$y = Cx^2$$

確實是一般解, 且當  $C > 0$  時, 得開口向上的拋物線家族;  $C = 0$  時, 爲  $x$ -軸;  $C < 0$  時, 爲開口向下的拋物線家族, 如圖示, 並稱此種曲線家族 (family of curves) 爲解曲線 (solution curves).

假設欲知過點  $(1, 3)$  的解, 此乃相當於欲知給定初始條件, 當  $x = 1$  時,  $y = 3$  的解, 也就是說, 求  $C$  使得一般解

$$y = Cx^2$$

滿足初始條件

$$x = 1, y = 3$$

解法為，代入上述初始條件，得

$$3 = C1^2$$

故

$$C = 3$$

因此，特殊解為

$$y = 3x^2$$

例 2. 試驗證

$$y = x \ln x^2 + 2x^{3/2} + Cx$$

是微分方程式

$$y' - \frac{y}{x} = 2 + \sqrt{x}$$

的一般解，並求滿足初始條件

$$x = 1, y = 3$$

的特殊解。

<解> 首先，將  $y$  對  $x$  微分，並根據微分的乘積法則，對數函數的微分公式，以及微分的簡單幕次法則，得

$$\begin{aligned} y' &= \ln x^2 + x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x + 3x^{1/2} + C \\ &= \ln x^2 + 2 + 3x^{1/2} + C \end{aligned}$$

並由此得

$$\begin{aligned}y' - \frac{y}{x} &= \ln x^2 + 2 + 3x^{1/2} + C \\ &\quad - \frac{1}{x}(x \ln x^2 + 2x^{3/2} + Cx) \\ &= \ln x^2 + 2 + 3x^{1/2} + C \\ &\quad - (\ln x^2 + 2x^{1/2} + C) \\ &= 2 + \sqrt{x}\end{aligned}$$

原式成立. 因此,

$$y = x \ln x^2 + 2x^{3/2} + Cx$$

爲一般解.

接著, 代入初始條件

$$x = 1, y = 3$$

並計算整理, 得

$$3 = 1 \ln 1^2 + 2(1)^{3/2} + C = 2 + C$$

故

$$C = 1$$

因此, 特殊解爲

$$y = x \ln x^2 + 2x^{3/2} + x$$

例 3. 設某新產品的最大銷售量為 10 個百萬單位. 假設銷售量  $x$  的成長率 (rate of growth) 是與 "最大銷售量和目前銷售量  $x$  的差" 成正比, 亦即,

$$\frac{dx}{dt} = k(10 - x), \quad 0 \leq x \leq 10$$

此乃因為  $\frac{dx}{dt}$  表示變化率 (rate of change), 乃銷售量的成長率;  $k$  為成正比的比率常數 (proportionality);  $(10 - x)$  乃最大銷售量與目前銷售量  $x$  的差, 並根據題意列式所致. (a) 試驗證

$$x = 10 - Ce^{-kt}$$

一般解, 其中  $C$  與  $k$  為二未知常數. (b) 若一年後, 銷售 250,000 個單位, 試求此產品的銷售量函數.

<解> (a) 驗證. 首先, 將銷售量  $x$  對時間  $t$  微分, 並根據指數函數的微分公式, 得

$$\frac{dx}{dt} = -Ce^{-kt}(-k) = kCe^{-kt}$$

又代入  $x$ , 得

$$k(10 - x) = k(10 - 10 + Ce^{-kt}) = kCe^{-kt}$$

故, 比較上二式, 得

$$\frac{dx}{dt} = k(10 - x)$$

原式成立. 因此,

$$x = 10 - Ce^{-kt}$$

是一般解.

(b) 因為有兩個未知常數, 故需要兩個初始條件, 首先由一般常識, 得

$$t = 0, x = 0$$

另由題意, 得給定的已知條件

$$t = 1, x = 0.25$$

接著, 代入第一個初始條件

$$t = 0, x = 0$$

得

$$0 = 10 - Ce^{-k(0)} = 10 - C$$

故

$$C = 10$$

因此, 代入由第一個初始條件所得的常數  $C$ , 得較明確的銷售量

$$x = 10 - 10e^{-kt} \quad (2)$$

還有一個未知常數  $k$  待決定.

再代入第二個初始條件

$$t = 1, x = 0.25$$

得

$$0.25 = 10 - 10e^{-k(1)} = 10 - 10e^{-k}$$

經由整理, 得

$$\begin{aligned} e^{-k} &= \frac{1}{10} \left( 10 - \frac{1}{4} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{40} = \frac{39}{40} \end{aligned}$$

再將上式兩邊同取  $\ln$ , 並根據指數與對數的互逆性, 得

$$-k = \ln \left( \frac{39}{40} \right)$$

故由上式以及對數律,

$$\begin{aligned} k &= -\ln \left( \frac{39}{40} \right) \\ &= \ln \left[ \left( \frac{39}{40} \right)^{-1} \right] = \ln \left( \frac{40}{39} \right) \end{aligned}$$

最後, 將  $k$  代入 (2) 式, 得明確的銷售量

$$x = 10 - 10e^{-\ln \left( \frac{40}{39} \right) t}$$

乃一特殊解.

## 例 4. 驗證

$$x^2 + y^2 = Cy$$

是微分方程式

$$y'(x^2 - y^2) = 2xy$$

的一般解.

<解> 因為函數  $y$  並不是如同前面的情況, 以明確的數學式表示, 而是以一個方程式表示出與自變數  $x$  的關係, 故不能直接對  $y$  微分, 而需先解  $y$ , 再求  $y'$ , 然而解  $y$  通常是困難且經常是不可行的; 一個可行的方式是, 利用隱微分 (implicit differentiation), 亦即, 兩邊對  $x$  微分, 並視  $y$  為  $x$  的函數, 得

$$2x + 2y \cdot y' = Cy'$$

接著, 將含  $y'$  的各項移至等號左邊, 其餘各項移至等號右邊, 並整理, 得

$$y'(2y - C) = -2x$$

再將兩邊同乘  $-y$ , 得

$$y'(Cy - 2y^2) = 2xy$$

最後, 代入

$$x^2 + y^2 = Cy$$

得

$$y'(x^2 + y^2 - 2y^2) = 2xy$$

亦相當於

$$y'(x^2 - y^2) = 2xy$$

原式成立.

因此,

$$x^2 + y^2 = Cy$$

是微分方程式

$$y'(x^2 - y^2) = 2xy$$

的一般解.