

## 單元 46: 全微分式

(課本 §8.6)

複習. 設  $y = f(x)$ , 自變數  $x$  的增量 (increment) 定義為  $\Delta x$ , 應變數  $y$  的增量

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

且微分式為

$$dx = \Delta x \quad (\text{自變數})$$

以及

$$dy = f'(x)dx \quad (\text{應變數})$$

應用為

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx$$

當  $dx$  充分小時, 如圖示.

推廣. 設  $z = f(x, y)$ , 自變數  $x$  與  $y$  的增量定義為  $\Delta x, \Delta y$ ; 應變數  $z$  的增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

且微分式為

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y \quad (\text{自變數})$$

以及

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad (\text{應變數})$$

又稱作全微分式 (total differential), 乃  $dx$  與  $dy$  的線性函數.

應用為

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

當  $\Delta x = dx$ ,  $\Delta y = dy$  充分小時, 如圖示.

例 1. 令  $z = f(x, y) = 2x^2 - xy$ .

(a) 由定義,  $z$  的增量

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [2(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y)] \\ &\quad - (2x^2 - xy) \\ &= 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - xy - x\Delta y \\ &\quad - y\Delta x - \Delta x\Delta y - 2x^2 + xy \\ &= (4x - y)\Delta x - x\Delta y + 2(\Delta x)^2 - \Delta x\Delta y\end{aligned}$$

(b) 若  $(x, y)$  由  $(1, 1)$  變至  $(0.98, 1.03)$  時,

$$\Delta x = 0.98 - 1 = -0.02$$

且

$$\Delta y = 1.03 - 1 = 0.03$$

以及

$$\begin{aligned}\Delta z &= (4 - 1)(-0.02) - (0.03) \\ &\quad + 2(-0.02)^2 - (-0.02)(0.03) \\ &= -0.06 - 0.03 + 0.0008 + 0.0006 \\ &= -0.09 + 0.0014 = -0.0886\end{aligned}$$

例 2. 令  $z = f(x, y) = 2x^2y + y^3$ .

(a) 根據定義, 全微分式

$$\begin{aligned}dz &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ &= 4xydx + (2x^2 + 3y^2)dy\end{aligned}$$

(b) 當  $x$  由  $x = 1$  變至  $x = 1.01$  且  $y$  由  $y = 2$  至  $y = 1.98$  時,  $z$  的近似變化

$$\begin{aligned}dz &= 4(1)(2)(1.01 - 1) \\ &\quad + (2 + 12)(1.98 - 2) \\ &= 8(0.01) + 14(-0.02) = 0.08 - 0.28 \\ &= -0.20\end{aligned}$$

(c) 根據定義,  $z$  的真正變化

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(1.01, 1.98) - f(1, 2) \\ &= [2(1.01)^2(1.98) + (1.98)^3] \\ &\quad - [2(1)^2(2) + (2)^3] \\ &= 11.801988 - 12 = -0.1988 \approx -0.20\end{aligned}$$

即  $\Delta z \approx dz$ .

例 3. 揚聲器的收益函數

$$R(x, y) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y$$

當組裝型  $x$  由 200 增至 206 且自助型  $y$  由 60 增至 64 時,

$$\Delta x = 206 - 200 = 6, \quad \Delta y = 64 - 60 = 4$$

且收益的改變量

$$\begin{aligned}\Delta R &\approx dR = \frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy \Big|_{\substack{x=200, y=60 \\ dx=6, dy=4}} \\ &= \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 300\right) dx \\ &\quad + \left(-\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x + 240\right) dy \Big|_{\substack{x=200, y=60 \\ dx=6, dy=4}} \\ &= (-100 - 15 + 300)(6) \\ &\quad + (-45 - 50 + 240)(4) \\ &= 185(6) + 145(4) = 1690\end{aligned}$$

例 4. 二戰後某國家的生產量函數為

$$z = f(x, y) = 30x^{2/3}y^{1/3}$$

若勞力財  $x$  由 125 減至 123 且資本財  $y$  由 27 增至 29 時, 產量變化

$$\begin{aligned} \Delta z &\approx dz = f_x dx + f_y dy \Big|_{\substack{x=125, y=27 \\ dx=-2, dy=2}} \\ &= 20 \left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} dx \\ &\quad + 10 \left(\frac{x}{y}\right)^{2/3} dy \Big|_{\substack{x=125, y=27 \\ dx=-2, dy=2}} \\ &= 20 \left(\frac{27}{125}\right)^{1/3} (-2) + 10 \left(\frac{125}{27}\right)^{2/3} (2) \\ &= 20 \left(\frac{3}{5}\right) (-2) + 10 \left(\frac{25}{9}\right) (2) \\ &= -24 + \frac{500}{9} = -24 + 55\frac{5}{9} = 31\frac{5}{9} \end{aligned}$$

即增加資本財的投資是有利的, 與 §8.2, 例 4 的建議吻合.

推廣. 三變數函數  $w = f(x, y, z)$  全微分式

$$dw \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

其中  $dx = \Delta x$ ,  $dy = \Delta y$ ,  $dz = \Delta z$  且  $x$  由  $a$  變至  $a + \Delta x$ ,  $y$  由  $b$  變至  $b + \Delta y$  以及  $z$  由  $c$  變至  $c + \Delta z$ .

例 5. 度量一長方形盒子長, 寬, 高的最大誤差為 1% 時, 體積的最大百分誤差 (maximum percentage error) 為何?

<解> 設度量的長寬高為  $x, y, z$ , 真實的長寬高為  $a, b, c$ . 由題意,

$$\frac{|\Delta x|}{a} = \frac{|x - a|}{a} \leq 0.01$$

即

$$|\Delta x| = |x - a| \leq 0.01a$$

同理,

$$|\Delta y| = |y - b| \leq 0.01b$$

且

$$|\Delta z| = |z - c| \leq 0.01c$$

因此, 體積

$$V = f(x, y, z) = xyz$$

且

$$\begin{aligned}
 |\Delta V| &\approx |dV| \\
 &= \left| \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right| \Bigg|_{x=a, y=b, z=c} \\
 &= |yz dx + xz dy + xy dz| \Bigg|_{x=a, y=b, z=c} \\
 &= |bcdx + acdy + abdz| \\
 &\leq bc|dx| + ac|dy| + ab|dz| \\
 &\leq bc(0.01a) + ac(0.01b) + ab(0.01c) \\
 &= 0.03(abc)
 \end{aligned}$$

其中倒數第三個不等式乃根據三角不等式

$$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$$

又真正體積為  $V = abc$ , 故百分誤差為

$$\frac{|\Delta V|}{V|_{(a,b,c)}} 100\% \leq \frac{(0.03)abc}{abc} 100\% = 3\%$$

即最大百分誤差為 3%.

## Exercises

11. 設  $z = f(x, y) = x^2 e^y + y \ln x$ , 則全微分式

$$\begin{aligned}
 dz &= f_x dx + f_y dy \\
 &= \left( 2xe^y + \frac{y}{x} \right) dx + (x^2 e^y + \ln x) dy
 \end{aligned}$$

18. 設  $w = f(x, y, z) = \sqrt{e^x + e^y + ze^{xy}}$ , 全微分式

$$\begin{aligned} dw &= \frac{e^x + yze^{xy}}{2\sqrt{e^x + e^y + ze^{xy}}}dx \\ &\quad + \frac{e^y + xze^{xy}}{2\sqrt{e^x + e^y + ze^{xy}}}dy \\ &\quad + \frac{e^{xy}}{2\sqrt{e^x + e^y + ze^{xy}}}dz \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e^x + e^y + ze^{xy}}}[(e^x + yze^{xy})dx \\ &\quad + (e^y + xze^{xy})dy + e^{xy}dz] \end{aligned}$$

30. 設  $z = f(x, y) = \ln(xy)^{1/2}$  且  $(x, y)$  由  $(5, 10)$  變至  $(5.04, 9.94)$ . 根據對數律改寫, 得

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln y$$

以及

$$\begin{aligned} \Delta z &\approx dz \\ &= \frac{1}{2x}dx + \frac{1}{2y}dy \Big|_{\substack{x=5, y=10 \\ dx=0.04, dy=-0.06}} \\ &= \frac{1}{10}(0.04) + \frac{1}{20}(-0.06) \\ &= \frac{0.04 - 0.03}{10} = 0.001 \end{aligned}$$



## 40. 設生產函數

$$z = f(x, y) = 50x^{1/3}y^{2/3}$$

若勞力財增加 2% 且資本財增加 1%, 即

$$dx = 0.02x, \quad dy = 0.01y$$

則

$$\begin{aligned} \Delta z &\approx dz \\ &= \frac{50}{3} \left(\frac{y}{x}\right)^{2/3} dx \\ &\quad + \frac{100}{3} \left(\frac{x}{y}\right)^{1/3} dy \Big|_{dx=0.02x, dy=0.01y} \\ &= \frac{50}{3} (0.02)x^{1/3}y^{2/3} \\ &\quad + \frac{100}{3} (0.01)x^{1/3}y^{2/3} \\ &= \left(\frac{0.02}{3} + \frac{0.02}{3}\right) (50x^{1/3}y^{2/3}) \\ &= \frac{0.04}{3} z \end{aligned}$$

因此, 百分變化 (percentage change)

$$\frac{\Delta z}{z} \approx \frac{dz}{z} = \frac{0.04}{3} z = \frac{0.04}{3} \approx 0.0133$$

即約 1.33%.

44. 設細動脈的血流量為

$$V = \frac{\pi p r^4}{8kl}$$

其中  $p, k$  為常數. 若長度  $l$  的度量誤差為 2%, 半徑  $r$  的度量誤差為 1%, 即

$$dl = 0.02l, \quad dr = 0.01r$$

則

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx dV \\ &= \frac{\partial V}{\partial l} dl + \frac{\partial V}{\partial r} dr \Big|_{dl=0.02l, dr=0.01r} \\ &= \frac{\pi p}{8k} \left( -\frac{r^4}{l^2} dl + \frac{4r^3}{l} dr \right) \Big|_{dl=0.02l, dr=0.01r} \\ &= \frac{\pi p}{8k} \left[ -\frac{r^4}{l^2} (0.02l) + \frac{4r^3}{l} (0.01r) \right] \\ &= \frac{\pi p r^4}{8kl} (-0.02 + 0.04) = 0.02V \end{aligned}$$

因此, 百分變化 (percentage change)

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{0.02V}{V} = 0.02$$

即約 2%.