單元 52: 微分方程式的近似解
(課本 §9.4)

如同定積分, 許多微分方程式的精確解 (exact solution) 無法求得, 故需求近似解. 本章探討型如

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

的近似解. 採用的方法稱作尤拉法 (Euler's method, 以德國數學家 Leonhard Euler 命名).

構想爲, $\frac{dy}{dx}$ 表示解 $y = f(x)$ 在點 (x, y) 的切線斜率乃等於 $F(x, y)$. 故在點 (x, y) 附近的解可由過 (x, y) 的切線近似, 如圖示, 即在 (x_0, y_0) 附近的 f 值可由過 (x_0, y_0) 的切線

$$y - y_0 = F(x_0, y_0)(x - x_0)$$

即

$$y = y_0 + F(x_0, y_0)(x - x_0)$$

近似. 也就是說, 解

$$f(x) \approx y = y_0 + F(x_0, y_0)(x - x_0)$$

當 x 靠近 x_0 時. 因此, 當 $x_1 = x_0 + h$ 時, 眞解

$$\begin{aligned} f(x_1) &\approx y_1 = y_0 + F(x_0, y_0)(x_0 + h - x_0) \\ &= y_0 + F(x_0, y_0)h \end{aligned}$$

接著, 解 f 在 點 $(x_1, f(x_1))$ 的切線斜率

$$F(x_1, f(x_1)) \approx F(x_1, y_1)$$

(因爲 $f(x_1) \approx y_1$), 故在點 $(x_1, f(x_1))$ 附近的 f 值可由過點 (x_1, y_1) 且斜率爲 $F(x_1, y_1)$ 的切線

$$y - y_1 = F(x_1, y_1)(x - x_1)$$

近似. 原本應爲

$$y - f(x_1) = F(x_1, f(x_1))(x - x_1)$$

但代 $f(x_1) \approx y_1$, 得

$$y - y_1 = F(x_1, y_1)(x - x_1)$$

即, 解

$$f(x) \approx y = y_1 + F(x_1, y_1)(x - x_1)$$

當 x 靠近 x_1 時, 如圖示. 故當 $x_2 = x_1 + h$ 時, 眞解

$$\begin{aligned} f(x_2) &\approx y_2 = y_1 + F(x_1, y_1)(x_1 + h - x_1) \\ &= y_1 + F(x_1, y_1)h \end{aligned}$$

註. 介於 x_0 與 x_1 間的解 $f(x)$, 則以連接的線段近似.

同理, 當 $x_3 = x_2 + h$ 時, 眞解

$$f(x_3) \approx y_3 = y_2 + F(x_2, y_2)h$$

類推, 當 $x_n = x_{n-1} + h$ 時, 眞解

$$f(x_n) \approx y_n = y_{n-1} + F(x_{n-1}, y_{n-1})h$$

總結, 得

尤拉法. 設給定微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

欲估計眞解 $y(b)$, 如圖示. 過程爲, n 等分 $[x_0, b]$ ，得子區間長度 $h = \frac{b - x_0}{n}$ 且令

$$x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h = x_1 + h$$

和

$$x_3 = x_0 + 3h = x_2 + h, \ldots,$$

以及

$$x_n = x_0 + nh = x_{n-1} + h = b$$

並計算估計, 得

$$\begin{aligned}
y(x_0) &= y_0 \\
y(x_1) &\approx y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) \\
y(x_2) &\approx y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) \\
&\vdots \\
y(x_n) &\approx y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})
\end{aligned}$$

例 1. 試以尤拉法且 $n=8$ 估計初始值問題

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1$$

在 $x=2$ 的解.

<解> 將 $[0,2]$ 8 等分, 得 $h = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$ 及

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, \ldots, x_7 = \frac{7}{4}, x_8 = 2$$

如圖示, 故計算, 得

$$\begin{aligned}
y_0 &= y(0) = 1 \\
y_1 &= y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + \frac{1}{4}(0-1) = \frac{3}{4} \\
y_2 &= y_1 + hF(x_1, y_1) \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8} \\
y_3 &= y_2 + hF(x_2, y_2) \\
&= \frac{5}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) = \frac{19}{32} \\
&\vdots \\
y_7 &= y_6 + hF(x_6, y_6) = \frac{8331}{8192} \\
y(2) &\approx y_8 = y_7 + hF(x_7, y_7) \\
&= \frac{8331}{8192} + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{4} - \frac{8331}{8192}\right) = \frac{39329}{32768} \\
&\approx 1.2002
\end{aligned}$$

例 2. 試以尤拉法及 (a) $n=5$, (b) $n=10$ 分別估計初始值問題

$$y'=-2xy^2,\quad y(0)=1,\ 0\le x\le 0.5$$

<解> 將 $[0,0.5]$ 5 等分, 得 $h=\frac{0.5-0}{5}=0.1$ 及

$$x_0=0,x_1=0.1,\ldots,x_4=0.4,x_5=0.5$$

如圖示, 故計算估計, 得

$$\begin{aligned}
y_0 &= y(0)=1\\
y_1 &= y_0+hF(x_0,y_0)\\
&= 1+0.1(-2)(0)(1)^2=1\\
y_2 &= y_1+hF(x_1,y_1)\\
&= 1+0.1(-2)(0.1)(1)^2=0.98\\
&\vdots\\
y_4 &= y_3+hF(x_3,y_3)\approx 0.8884\\
y(0.5) &\approx y_5=y_4+hF(x_4,y_4)\\
&= 0.8884+0.1(-2)(0.4)(0.8884)^2\\
&\approx 0.8253
\end{aligned}$$

(b) 10 等分 $[0,0.5]$, 得 $h=\frac{0.5-0}{10}=0.05$ 及

$$x_0=0,x_1=0.05,\ldots,x_9=0.45,x_{10}=0.5$$

如圖示, 故計算估計, 得

$$
\begin{aligned}
y_0 &= y(0) = 1 \\
y_1 &= y_0 + hF(x_0, y_0) \\
&= 1 + 0.05(-2)(0)(1)^2 = 1 \\
y_2 &= y_1 + hF(x_1, y_1) \\
&= 1 + 0.05(-2)(0.05)(1)^2 = 0.995 \\
&\vdots \\
y_9 &= y_8 + hF(x_8, y_8) = 0.8440 \\
y(0.5) &\approx y_{10} = y_9 + hF(x_9, y_9) \\
&= 0.8440 + 0.05(-2)(0.45)(0.8440)^2 \\
&\approx 0.8119
\end{aligned}
$$

求眞解, 首先分離變數, 得

$$\frac{dy}{y^2} = -2xdx$$

兩邊積分, 得

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int 2xdx$$

即

$$-\frac{1}{y} = -x^2 + C$$

同乘 (-1), 得

$$\frac{1}{y} = x^2 + C$$

故

$$y = \frac{1}{x^2 + C}$$

代 $y(0) = 1$, 得

$$\frac{1}{0 + C} = 1$$

即 $C = 1$ 且特殊解爲

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

如圖示, 分割愈細, 近似解愈靠近眞解, 估計愈準.

Exercises

16. 目前服務業占非農業人力的 30% 且 t 個十年 (decade) 後以

$$R(t) = 5e^{1/(t+1)}$$

的變化率持續成長. 試估計 10 年 (1 decade) 之後, 服務業在非農業人力的百分比.

<解> 令 $P(t)$ 為 t 個十年後, 服務業占非農業人力的百分比. 依題意, 得初始值問題

$$P' = 5e^{1/(t+1)}, \quad P(0) = 30$$

且欲估計 $P(1)$. 故可 10 等分 $[0,1]$, 得子區間長度 $h = \frac{1-0}{10} = 0.1$ 且

$$t_0 = 0,\ t_1 = 0.1,\ \ldots,\ t_9 = 0.9,\ t_{10} = 1$$

又 $F(t,P) = 5e^{1/(t+1)}$, 故計算估計, 得

$$\begin{aligned}
P_0 &= P(0) = 30 \\
P_1 &= P_0 + hF(t_0, P_0) \\
&= 30 + (0.1)5e^{1/(0+1)} = 30 + 0.5e \\
P_2 &= P_1 + hF(t_1, P_1) \\
&= (30 + 0.5e) + (0.1)5e^{1/(0.1+1)} \\
&= 30 + 0.5e + 0.5e^{1/1.1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$