單元 12: 三角函數的導函數
(課本 §4.5)

定理. 三角函數 $\sin x$ 與 $\cos x$ 對所有的 x 都是可微的且

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

以及

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

<證> 根據導函數的定義以及和角公式

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos x &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}\right] \quad (1)
\end{aligned}$$

再根據以前學過的兩個三角函數的極限:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

以及

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = 0$$

由 (1) 式, 可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cos x &= \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} - \\ &\qquad \sin x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\ &= (\cos x)(0) - (\sin x)(1) \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

另

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

的證明請自行參看課本.

註. 另外 4 個三角函數的導函數:

1. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

2. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

3. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

4. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

<證> 僅示範 $\frac{d}{dx}\sec x$ 的計算, 其它的證明可類推而得. 根據 $\sec x$ 的定義, 廣義冪次規則, 以及餘弦函數的導函數, 得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sec x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) \\
&= \frac{d}{dx}(\cos x)^{-1} \\
&= (-1)(\cos x)^{-2}\frac{d}{dx}\cos x \\
&= -(\cos x)^{-2}(-\sin x) \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x
\end{aligned}$$

例 1. 試求下列各函數的導函數.

(a) $y = \cos\left(x^2+1\right)$

(b) $y = x^2 \sin(3x) - \cos(5x)$

(c) $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\csc\left(t^2\right)}}$

(d) $y = \tan x^2$

(e) $y = \tan^2 x$

(f) $f(x) = \sec\sqrt{x^2+1}$

<解> 一般的原則是, 可能的話, 將原函數改寫成函數的次方的型式

$$c[f(x)]^n$$

以便使用廣義冪次規則. 若函數是合成函數的話, 就直接用連鎖規則. 無論一開始是使用廣義冪次規則或連鎖規則, 接著再使用下個微分步驟所需的規則, 直至完成所需的全部微分步驟.

複習: 連鎖規則

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

(a) 因爲 y 爲一合成函數, 根據連鎖規則,

$$\begin{aligned} y' &= -\sin\left(x^2+1\right)(2x) \\ &= -2x\sin\left(x^2+1\right) \end{aligned}$$

(b) 因爲第一項是 x^2 與一合成函數的乘積且第二項也是一合成函數, 故使用乘法規則與連鎖規則, 可得

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^2\right)' \sin(3x) + x^2(\sin(3x))' - \\ &\qquad (\cos(5x))' \\ &= 2x\sin(3x) + x^2\cos(3x)(3) + \\ &\qquad \sin(5x)(5) \\ &= 2x\sin(3x) + 3x^2\cos(3x) + 5\sin(5x) \end{aligned}$$

(c) 因爲可將原函數改寫成函數的次方, 故根據廣義冪次規則,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\csc\left(t^2\right)\right]^{-1/2} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left[\csc\left(t^2\right)\right]^{-3/2} \frac{d}{dt}\csc\left(t^2\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left[\csc\left(t^2\right)\right]^{-3/2} \cdot \\ &\qquad (-1)\csc\left(t^2\right)\cot\left(t^2\right)(2t) \\ &= t\csc^{-1/2}\left(t^2\right)\cot\left(t^2\right) \end{aligned}$$

(d) 原函數爲 tan 函數與 x^2 的合成函數, 所以直接使用連鎖規則, 先對 tan 微分得 $\sec^2$ 並代入 x^2 後, 再乘以 x^2 的導函數, 得

$$y' = \sec^2\left(x^2\right)\left(x^2\right)' = 2x\sec^2\left(x^2\right)$$

(e) 注意原函數是 $\tan x$ 的平方, 與 (d) 小題不同, 故採用廣義冪次規則, 得

$$\frac{dy}{dx} = 2(\tan x)(\tan x)' = 2\tan x \sec^2 x$$

(f) 首先, 原函數是 sec 與 $\sqrt{x^2+1}$ 的合成函數, 所以使用連鎖規則. 接著, 因爲 $\sqrt{x^2+1}$ 是一函數的次方的型式, 故對其微分時, 需採用廣義冪次規則. 最後, 按著順序合併使用的過程可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sec\sqrt{x^2+1}\tan\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)' \\ &= \sec\sqrt{x^2+1}\tan\sqrt{x^2+1}\cdot \\ &\qquad \left[\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-1/2}(2x)\right] \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\sec\sqrt{x^2+1}\tan\sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$