

單元 14: 反函數與對數函數的導函數 (課本 §4.7)

一. 反函數的導函數

設函數 f 爲一對一 (1-1) 且 $f^{-1}(x)$ 爲 f 的反函數, 則對於 $x \in \{f^{-1} \text{ 的定義域}\} = \{f \text{ 的值域}\}$,

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

將上式兩邊對 x 微分, 得

$$\frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx}(x)$$

接著, 根據連鎖規則,

$$f'(f^{-1}(x)) \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1$$

所以, 當

$$f'(f^{-1}(x)) \neq 0$$

時,

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (1)$$

亦即, 反函數的導函數與原函數的導函數呈顛倒數關係.

註. 萊布尼茲符號 (Leibniz notation):

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

所以, 根據 (1) 式,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{d}{dy} f^{-1}(y) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \end{aligned}$$

更明確地由符號呈現出顛倒數的關係.

例 1. 令

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x \geq 0$$

試求 $\frac{d}{dx} f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ 與 $\frac{d}{dx} f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

<解> (a) 由反函數的導函數公式,

$$\frac{d}{dx} f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$$

接著需要求出 $f'(x)$ 以及 $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ 並將其代入 $f'(x)$ 中.

首先,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} [1 - (x + 1)^{-1}] \\ &= \frac{1}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

又

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

此乃因為 $f(1) = \frac{1}{2}$. 所以,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{(1+1)^2}} = 4 \end{aligned}$$

(b) 因為 $f'(x)$ 在 (a) 小題已求出, 根據反函數的導函數公式, 僅需求 $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. 過程如下: 令

$$x = f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

由反函數的定義, 上式相當於

$$f(x) = \frac{1}{3}$$

亦即,

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{3}$$

解之, 得

$$3x = x + 1$$

故,

$$x = f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

所以,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}} \\ &= \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

例 2. 令

$$f(x) = 2x + e^x, \quad x \in \mathbf{R}$$

試求 $\frac{d}{dx}f^{-1}(1)$.

<解> 首先,

$$f'(x) = 2 + e^x$$

又

$$f(0) = 2(0) + e^0 = 1$$

由此得,

$$f^{-1}(1) = 0$$

因此, 根據反函數的導函數公式,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f^{-1}(1) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} \\ &= \frac{1}{f'(0)} \\ &= \frac{1}{2 + e^0} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

例 3. 令

$$f(x) = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

則

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, \infty)$$

的圖形如下. 根據水平線檢定法, 得知 f 為一對一函數. 因此, 定義 f 的反函數

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \tan^{-1} x \\ &\stackrel{\text{或}}{=} \arctan x : (-\infty, \infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

試求 $\frac{d}{dx} \arctan x$.

<解> 因為

$$\tan(\tan^{-1} x) = x$$

所以, 兩邊對 x 微分, 得

$$\frac{d}{dx} \tan(\tan^{-1} x) = \frac{d}{dx}(x)$$

再根據連鎖規則以及 \tan 函數的微分公式, 得

$$\sec^2(\tan^{-1} x) \cdot \frac{d}{dx} \tan^{-1} x = 1$$

所以,

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1} x)}$$

接著根據三角恆等式 $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, 上式相當於

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \tan^{-1} x &= \frac{1}{1 + \tan^2 (\tan^{-1} x)} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}\end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃因為 $\tan(\tan^{-1} x) = x$.

例如,

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} (1) = \frac{1}{1 + (1)^2} = \frac{1}{2}$$

例 4. 令

$$f(x) = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

則

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

的圖形如下. 故根據水平檢定法得知, f 為一對一函數.

因此, 定義 f 的反函數

$$\begin{aligned}f^{-1}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sin^{-1} x \\ &\stackrel{\text{或}}{=} \arcsin x : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

試求 $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x$.

<解> 直接使用反函數的導函數公式, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin^{-1} x &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

第四個等式成立是因為當 $\sin^{-1} x \in [-\pi/2, \pi/2]$ 時, $\cos(\sin^{-1} x) > 0$ 且 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 所致.

注意. 最後一個等式顯示 $\sin^{-1} x$ 可微的範圍是 $-1 < x < 1$, 不含兩端點, 而此二點卻是 \sin^{-1} 有定義的地方. 此乃因為在此二點時, 由第三式知, 分母為

$$\cos(\sin^{-1}(1)) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

且

$$\cos(\sin^{-1}(-1)) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

故需除去此二點。或由圖形可看出在此二點的切線為鉛直線，故不可微。

若不記得反函數的導函數公式，可採用此單元一開始時使用的方法，也就是例 3 的方法，根據反函數的定義，得

$$\sin(\sin^{-1} x) = x$$

接著兩邊對 x 微分，並由連鎖規則，得

$$\cos(\sin^{-1} x) \cdot \frac{d}{dx} \sin^{-1} x = 1$$

因此，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin^{-1} x &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

舉例，

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

二. 對數函數的導函數

定理. 自然對數以及底數為 a 的對數函數的導函數如下:

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$$

註. 以 a 為底數的指數函數的導函數

$$\frac{d}{dx} a^x = (\ln a) a^x$$

乃乘上一個常數 $\ln a$, 而其反函數的導函數為除以常數 $\ln a$.

<證> (1) 首先根據反函數的定義,

$$e^{\ln x} = x$$

接著兩邊對 x 微分, 並運用連鎖規則以及指數函數的微分公式, 得

$$e^{\ln x} \cdot \frac{d}{dx} \ln x = 1$$

解之, 得

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

(2) 由換底公式,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

接著, 根據自然對數的微分公式,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log_a x &= \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx} \ln x \\ &= \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} \end{aligned}$$

註. 一個常用到的對數合成函數的導函數公式:

$$\frac{d}{dx} \ln [f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

爲何如此? 直接由連鎖規則, 先對 \ln 微分, 得 $\frac{1}{x}$ 並將 $f(x)$ 代入, 再乘上 $f'(x)$, 故

$$\frac{d}{dx} \ln [f(x)] = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

例 5. 試求下列各項的導函數.

(a) $y = \ln \sqrt[3]{x^2 + 1}$

$$(b) f(x) = \sin(\ln(3x))$$

$$(c) y = \ln(\ln t)$$

$$(d) y = \log_5\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

<解> (a) 根據對數函數的化簡公式, 先將 y 改寫成

$$y = \frac{1}{3} \ln(x^2 + 1)$$

再根據連鎖規則以及對數函數的微分公式或上述的註解,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' \\ &= \frac{2x}{3(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

(b) f 為兩次的合成函數, 故使用兩次連鎖規則以及對應函數的微分公式, 可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\ln(3x)) \cdot \frac{d}{dx} \ln(3x) \\ &= \cos(\ln(3x)) \frac{1}{3x} \cdot (3x)' \\ &= \cos(\ln(3x)) \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(c) 因為 y 為一對數合成函數, 故由連鎖規則,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{1}{\ln t} \cdot \frac{d}{dt} \ln t \\ &= \frac{1}{\ln t} \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{t \ln t}\end{aligned}$$

(d) 先化簡 y , 得

$$y = \log_5 x - \log_5(x + 1)$$

此乃避免在運用連鎖規則時, 要採用較複雜的除法規則對

$$\frac{x}{x + 1}$$

微分. 接著逐項微分, 得

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{\ln 5} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln 5} \frac{1}{x + 1} \\ &= \frac{1}{\ln 5} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} \right)\end{aligned}$$

三. 對數微分 (Logarithmic Differentiation)

三類函數的微分過程, 分述如下.

(1) $y = [f(x)]^n$, 亦即 y 為一函數的 n 次方. 故根據廣義幕次規則 (也就是連鎖規則加幕次規則), 得

$$\frac{dy}{dx} = n [f(x)]^{n-1} f'(x)$$

(2) $y = a^{f(x)}$, 亦即 y 為常數 a 的函數次方 (也就是底數為 a 的指數函數與 $f(x)$ 的合成函數). 故根據連鎖規則與指數函數的微分公式,

$$\frac{dy}{dx} = (\ln a) a^{f(x)} f'(x)$$

(3) $y = [f(x)]^{g(x)}$, 亦即 y 為一函數的函數次方, 與前面的兩類不同, 故不可採用前面所提的方法, 也就是說

$$\frac{dy}{dx} \neq g(x) [f(x)]^{g(x)-1} f'(x)$$

以及

$$\frac{dy}{dx} \neq \ln(f(x)) [f(x)]^{g(x)} g'(x)$$

問. $\frac{dy}{dx}$ 為何?

答. 需透過含三個步驟的對數微分 (logarithmic differentiation):

(i) 兩邊取對數並化簡

(ii) 對 x 微分

(iii) 解 $\frac{dy}{dx}$

舉例說明如下.

例 6. 試求下列各項的導函數.

(a) $y = x^x$

(b) $y = (\sin x)^x$

<解> (a) 因為原函數為一函數的函數次方, 故根據對數微分的三個步驟, 得

(i) 兩邊取 \ln :

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x$$

(ii) 對 x 微分 (視 y 為 x 的函數):

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = (1) \ln x + x \left(\frac{1}{x} \right) = 1 + \ln x$$

(iii) 解 $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x) = (1 + \ln x)x^x$$

(b) 同 (a), y 為一函數的函數次方, 故使用對數微分, 得

$$\ln y = x \ln (\sin x)$$

以及 (兩邊對 x 微分, 視 y 為 x 的函數)

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= (1) \ln (\sin x) + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x \\ &= \ln (\sin x) + x \cot x \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y [\ln (\sin x) + x \cot x] \\ &= [\ln (\sin x) + x \cot x] (\sin x)^x \end{aligned}$$

應用：簡化含乘，除，次方項的式子的微分。

例 7. 試求

$$y = \frac{e^x x^{3/2} \sqrt{1+x}}{(x^2+3)^4 (3x-2)^3}$$

的 $\frac{dy}{dx}$.

<解> 避免直接微分時，會面對乘法，除法，幕次規則等繁雜的微分過程，可採用對數微分，將乘積，相除，次方的部分改寫成加，減以及乘積的形式，而化簡微分的過程。

首先兩邊取對數 \ln 並化簡，得

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln e^x + \ln x^{3/2} + \ln(\sqrt{1+x}) - \\ &\quad \ln(x^2+3)^4 - \ln(3x-2)^3 \\ &= x + \frac{3}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln(1+x) - \\ &\quad 4 \ln(x^2+3) - 3 \ln(3x-2) \end{aligned}$$

接著兩邊對 x 微分 (視 y 為 x 的函數)，得

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} - \\ &\quad 4 \frac{2x}{x^2+3} - 3 \frac{3}{3x-2} \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y \left[1 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{8x}{x^2+3} - \frac{9}{3x-2} \right] \\ &= \frac{e^x x^{3/2} \sqrt{1+x}}{(x^2+3)^4 (3x-2)^3} \cdot \\ &\quad \left[1 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{8x}{x^2+3} - \frac{9}{3x-2} \right]\end{aligned}$$

例 8. (幕次規則). 令 r 為任一實數. 試證

$$\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}$$

<證> 令 $y = x^r$. 根據對數微分, 得

$$\ln y = r \ln x$$

以及

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = r \frac{1}{x}$$

所以,

$$\frac{dy}{dx} = r \frac{1}{x} \cdot y = r \frac{1}{x} \cdot x^r = r x^{r-1}$$