單元 17: 單調性與凹性
(課本 §5.2)

例子. 魚類爲一無限成長者 (indeterminate grower), 亦即, 其身體大小在一生當中不斷成長, 但隨年齡的增加而有速度趨緩的現象. 描述此現象的一個很好的方程式爲

$$L(x) = L_\infty - (L_\infty - L_0)e^{-Kx},\ x \geq 0$$

其中 $L(x)$ 表示在年齡 x 的長度, L_0 爲在年齡 0 的長度, L_∞ 代表漸近的最大長度 (asymptotic max length) (故, $L_\infty > L_0$), K 爲一與成長率相關聯的常數 (K 愈大, 成長速率愈快).

圖形如下.

觀察的結論:

1. 身體大小 $L(x)$ 不斷成長 $\Leftrightarrow$ $L(x)$ 的切線斜率 > 0, 也就是說,

$$L'(x) = K(L_\infty - L_0)e^{-Kx} > 0$$

相當於 $L(x)$ 的圖形遞增.

2. 成長率趨緩 $\Leftrightarrow$ $L'(x)$ 的切線斜率 < 0, 亦即,

$$L''(x) = -K^2(L_\infty - L_0)e^{-Kx} < 0$$

相當於 $L(x)$ 的圖形向下彎 (下凹).

一. 單調性 (Monotonicity)

定義. 假設函數 f 定義在區間 I 上.

(1) f 在區間 I 上爲 (嚴格) 遞增 (strictly increasing) 若且爲若

$$\text{對 } I \text{ 中任意的 } x_1 < x_2,\ f(x_1) < f(x_2)$$

(2) f 在區間 I 上爲 (嚴格) 遞減 (strictly decreasing) 若且爲若

$$\text{對 } I \text{ 中任意的 } x_1 < x_2,\ f(x_1) > f(x_2)$$

(3) f 爲遞增或遞減, 統稱爲單調 (monotonic).

問. 如何判斷 f 的遞增, 減性?

答. 可根據下述的定理.

定理. (單調性的一階導函數檢定法). 設 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續且在開區間 (a, b) 上可微. 則

(1) 若對所有的 $x \in (a, b)$, $f'(x) > 0$, 則 f 在 $[a, b]$ 上是遞增的.

(2) 若對所有的 $x \in (a, b)$, $f'(x) < 0$, 則 f 在 $[a, b]$ 上爲遞減的.

註. 一階導函數 $\Rightarrow$ 單調性 (遞增, 遞減性).

<證> 先證明 (1). 在 $[a, b]$ 中任選兩點 $x_1 < x_2$, 則 f 在 $[x_1, x_2]$ 上連續且在 (x_1, x_2) 上可微. 故由均值定理, 存在 $c \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$$

(大於 0, 乃由 (1) 的假設). 又因爲 $x_2 - x_1 > 0$, 得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = (+)(+) > 0$$

也就是說, 對任意的 $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$. 因此, 根據定義, f 是遞增的.

同理可證 (2).

例 1. 令函數

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3,\ x \in (-\infty, \infty)$$

試找出 f 遞增與遞減的範圍.

<解> 因爲 f 在 $(-\infty, \infty)$ 上是連續且可微的, 故可用一階導函數 f' 來判斷. 首先, 對於 $x \in (-\infty, \infty)$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3x - 6 \\ &= 3(x^2 - x - 2) \\ &= 3(x-2)(x+1) \end{aligned}$$

然後, 解 $f'(x) = 0$, 並以其根將定義域分割成若干個區間. 因爲 f' 是連續的, 根據中間値定理, 在每個分割的區間內, f' 只可能有一個符號, 不是正就是負, 不可能又有正又有負; 要不然, 在分割的區間內, f' 又會多出一個根, 這是與已經求出了 f' 的所有根相矛盾. 最後, 決定出每個區間內 f' 的符號, 就可根據單調性的一階導函數檢定法確定出 f 的遞增, 減性.

因此, 解 $f'(x) = 0$, 得 $x = -1, 2$, 並以此將實數線分成三個線段. 接著, 以下述的方式決定出 f' 在每個區

間內的符號, 並繪出如下的 f' 的符號圖 (sign chart), 即可得知 f 的單調性.

$(-\infty,-1)$: $f'(-2)=(-)(-)=(+)$, 遞增

$(-1,2)$: $f'(0)=(-)(+)=(-)$, 遞減

$(2,\infty)$: $f'(3)=(+)(+)=(+)$, 遞增

所以, 由一階導函數檢定法, f 在 $(-\infty,-1)$ 與 $(2,\infty)$ 上遞增; 在 $(-1,2)$ 上遞減.

註. 觀察如下的 f 與 f' 的圖形, 更顯示出一階導函數 f' 與原函數 f 的單調性之間的關係.

二. 彎曲性, 凹性 (Concavity)

定義. 假設一可微函數 f 定義在區間 I 上.

(1) f 在 I 上爲上彎 (上凹, concave up) 若且爲若 $f'(x)$ 在 I 上遞增, 如圖示.

(2) f 在 I 上爲下彎 (下凹, concave down) 若且爲若 $f'(x)$ 在 I 上遞減, 如圖示.

問. 如何判斷彎曲性 (凹性)?

答. 可依據下述定理判斷.

定理. (彎曲性的二階導函數檢定法). 設 f 在開區間 I 上爲二次可微 (twice differentiable, 亦即, $f''(x)$ 存在). 則

(1) 若對所有的 $x \in I$, $f''(x) > 0$, 則 f 爲上彎 (concave up, 上凹).

(2) 若對所有的 $x \in I$, $f''(x) < 0$, 則 f 爲下彎 (concave down, 下凹).

註 1. 可經由如下的臉型圖, 輔助二階導函數檢定法的記憶.

註 2. 二階導函數 $\Rightarrow$ 彎曲性 (凹性).

<證> (1) $f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ 在 I 上遞增. 故, 由彎曲性的定義, f 在 I 上爲上彎, 上凹.

(2) $f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$ 在 I 上遞減. 故, 由彎曲性的定義, f 在 I 上爲下彎, 下凹.

例 2. 令函數

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3,\ x \in R$$

(例 1. 的函數). 試判斷 f 的彎曲性 (concavity, 凹性).

<解> 因爲 f 爲一多項式, 故 f 是二次可微. 因此, 可用二階導函數 ($f''(x)$) 來判斷 f 的彎曲性:

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$$

$$f''(x) = 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

接著, 以 $f''(x) = 0$ 的解分割實數線並決定出 f'' 的符號圖 (sign chart):

$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$: $f''(0) = (-) < 0$, 下凹

$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$: $f''(1)=(+)>0$, 上凹

因此, f 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上爲下凹 (concave down); 在 $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ 上爲上凹 (concave up).

例 3. (報酬遞減, diminishing return). 一種減速遞增 (increasing at a decelerating rate) 的現象, 相當於 “一階導函數 >0 且二階導函數 <0”.

例如, 設農產量

$$Y(N)=Y_{\max}\frac{N}{K+N},\ N\geq 0$$

其中 N 爲氮的數量.

圖形如下.

所顯示的訊息可由下述的數學式子驗證之: 首先將 $Y(N)$ 改寫成

$$Y(N)=Y_{\max}\left(1-\frac{K}{K+N}\right)$$

則

- $\lim_{N\to\infty} Y(N) = Y_{\text{max}}\left(1 - \dfrac{K}{\infty}\right) = Y_{\text{max}}$. 所以, Y_{max} 爲最大漸近農產量 (理想中的最大農產量).

- $Y'(N) = Y_{\text{max}}\dfrac{K}{(K+N)^2} > 0$. 因此, $Y(N)$ 恆遞增.

- $Y''(N) = -Y_{\text{max}}\dfrac{2K}{(K+N)^3} < 0$. 也就是說, $Y'(N)$ 恆遞減, 亦相當於 $Y(N)$ 的遞增速度恆減緩而呈現出 $Y(N)$ 下彎的現象.