

單元 24: 積分的應用

(課本 §6.3)

一. 面積

由最簡單的情形推廣至一般的情形, 過程如下.

1. $f \geq 0$ 且在閉區間 $[a, b]$ 上連續.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \text{所圍出區域的符號面積} \\ &= A_+ - A_- \\ &= \text{所圍出區域的面積} \\ &\quad (\text{因為 } A_- = 0)\end{aligned}$$

2. $f \geq g \geq 0$ 且在閉區間 $[a, b]$ 上連續.

$$\begin{aligned}&\text{在 } [a, b] \text{ 上介於 } f \text{ 與 } g \text{ 間的區域的面積} \\ &= f \text{ 所圍出區域的面積} - \\ &\quad g \text{ 所圍出區域的面積} \\ &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_a^b [\text{上函數} - \text{下函數}] dx\end{aligned}$$

3. $f \geq g$ 且在閉區間 $[a, b]$ 上連續.

在 $[a, b]$ 上介於 f 與 g 間的區域的面積

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})] \Delta x \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_a^b [\text{上函數} - \text{下函數}] dx \end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃因為 $f - g$ 連續, 故

$$f - g \text{ 的黎曼和} \rightarrow \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

以及由左端點所形成的和是黎曼和的一特例所致.

例 1. 試求在 $[0, \pi/4]$ 上, 介於 $y = \sec^2 x$ 與 $y = \cos x$ 間的區域的面積.

<解> 繪圖後得知, 在 $[0, \pi/4]$ 上,

$$\sec^2 x \text{ (上函數)} \geq \cos x \text{ (下函數)}$$

又

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

以及

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

故,

$$\begin{aligned}\text{面積} &= \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \cos x) dx \\ &= \tan x - \sin x \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \left(\tan \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right) - (\tan 0 - \sin 0) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

例 2. 試求由 $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ 與 x -軸所圍成區域的面積.

<解> 先繪圖概略地認知所圍出的區域. 接著需執行下二步驟:

(1) 求交點 (決定積分的上下界).

由

$$y = \sqrt{x}$$

以及

$$y = x - 2$$

得等式

$$\sqrt{x} = x - 2$$

兩邊平方, 解 x , 得

$$x = x^2 - 4x + 4$$

由此導出

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4) = 0$$

故,

$$x = 1 \text{ (多出的, 不合, 因為 } \sqrt{1} \neq 1 - 2)$$

以及

$$x = 4$$

所以, 積分的範圍是 $[0, 4]$

(2) 決定上, 下函數.

上函數: $y = \sqrt{x}$, $0 < x < 4$

下函數: $\begin{cases} y = 0, & 0 < x < 2 \\ y = x - 2, & 2 < x < 4 \end{cases}$

最後，因為下函數在 $x = 2$ 的左，右，分別為兩個不同的函數，故需分解積分區域，得

$$\begin{aligned}
 \text{面積} &= \int_0^2 (\sqrt{x} - 0) dx + \int_2^4 \sqrt{x} - (x - 2) dx \\
 &= \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_2^4 \\
 &= \frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} + \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 16 + 8 - \\
 &\quad \left(\frac{2}{3} 2^{3/2} - 2 + 4 \right) = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

註. 若 $f(y) \geq g(y)$ 且在 y -軸的閉區間 $[c, d]$ 上是連續的，則可將上述的結果推廣如下，如圖示.

$$\begin{aligned}
 \text{面積} &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [f(y_{k-1}) - g(y_{k-1})] \Delta y \\
 &= \int_c^d [f(y) - g(y)] dy \\
 &= \int_c^d [\text{右函數} - \text{左函數}] dy
 \end{aligned}$$

第二個等號成立的乃因為 $f(y) - g(y)$ 在閉區間 $[c, d]$ 上連續，故

$$f(y) - g(y) \text{ 的黎曼和} \rightarrow \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$

以及由下端點所形成的和是一黎曼和的特例所致。

如, 例 2. 另解:

以水平長方條近似所圍出的區域, 此時要對 y 積分 (也就是說, 視 y 為自變數), 故要確定出 y 的積分範圍, 以及圍成區域的, 以 y 為自變數的, 右, 左函數, 過程如下.

(1) 積分的上, 下界.

很明顯地, 以水平長方條近似時, 是由 $y = 0$ 開始直到 $y = 2$ 為止, 故積分的範圍為 $0 \leq y \leq 2$.

(2) 需要將圍成區域的曲線, 由原來的以 x 為自變數的函數, 表成 y 的函數. 因此,

右函數: $y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2, 0 < y < 2$

左函數: $y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2, 0 < y < 2$

最後, 得

$$\begin{aligned}\text{面積} &= \int_0^2 (y + 2 - y^2) dy \\ &= \left. \frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3 \right|_0^2 \\ &= 2 + 4 - \frac{8}{3} = \frac{18 - 8}{3} = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

註. 很明顯地, 積分的計算比原先的做法簡單多了, 關鍵點乃在於只要計算一個積分式子. 至於何時用垂直長方條或水平長方條, 判斷的原則以簡化為準, 再加上由經驗所累積的直覺.

二. 累積變化 (Cumulative Change)

假設已知某量 $N(t)$ 的變化率

$$\frac{dN}{dt} = f(t), \quad t \geq 0$$

問. 在 $[0, t]$ 內的淨變化 (net change, 累積變化)

$$N(t) - N(0) \text{ 為何?}$$

根據 FTC (part 2), 因為

$$\frac{dN}{du} = f(u)$$

故

$$\begin{aligned} \int_0^t f(u) du &= N(u) \Big|_0^t \\ &= N(t) - N(0) \end{aligned}$$

亦即,

$$N(t) - N(0) = \int_0^t \left(\frac{dN}{du} \right) du$$

也就是說,

$$\text{在 } [0, t] \text{ 內的累積變化} = \int_0^t (\text{瞬間變化率}) du$$

例. 若

$$\frac{dW}{dx} = \text{某組織在年齡 } x \text{ 的重量變化率}$$

則根據微積分基本定理 (第二部份), 在年齡 2 與年齡 7 之間重量的累積變化等於

$$W(7) - W(2) = \int_2^7 \left(\frac{dW}{dx} \right) dx$$

三. 平均值 (Average Values)

設土壤中 10 個氮含量的濃度為

$$c(k), k = 1, \dots, 10$$

如圖示. 則此 10 個點的平均濃度

$$\bar{c} = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} c(k) = 643.3$$

推廣 1. 介於 $[a, b]$ 間的平均濃度為何?

構想: 在 $[a, b]$ 間等距度量出 n 個點的氮濃度

$$c(x_k), \quad k = 1, \dots, n$$

則此 n 個點的平均濃度

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c(x_k) \quad (1)$$

因為等距度量, 故

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

此乃相當於

$$\frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{b-a}$$

將其代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n c(x_k) \Delta x \\ &\rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b c(x) dx \end{aligned}$$

當 $n \rightarrow \infty$ 時, 此乃因為黎曼和的極限等於定積分所致.

推廣 2. 設 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上連續.

問. f 在閉區間 $[a, b]$ 上的平均值為何?

挑 n 個具代表性的點, 如, n 等分 $[a, b]$, 並於每個子區間內任選一點的 f 值,

$$f(c_k), \quad k = 1, \dots, n$$

然後求它們的平均值, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} [f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)] \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(c_k) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k, \quad \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

因爲 f 在 $[a, b]$ 上連續, 故上式中 f 的黎曼和的極限會等於 f 在 $[a, b]$ 上的定積分, 亦即, 當 $n \rightarrow \infty$,

$$n \text{ 個具代表性的 } f \text{ 值的平均值} \rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

因此, f 在 $[a, b]$ 上的平均值可定義如下.

定義. 設 f 在 $[a, b]$ 上連續. f 在 $[a, b]$ 上的平均值 (average value)

$$f_{\text{avg}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

例 3. 試求 $f(x) = 4 - x^2$ 在 $[-2, 2]$ 上的平均值.

<解> 根據上述的定義,

$$\begin{aligned} f_{\text{avg}} &= \frac{1}{2 - (-2)} \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(4x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-2}^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{16}{3} + \frac{16}{3} \right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{32}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

問. 是否存在一高為 h , 底邊由 -2 到 2 的長方形使得其面積等於 f 在 $[-2, 2]$ 上所圍出區域的面積?

答. 存在. 因為當高 $h = f_{\text{avg}}$ 時,

$$\begin{aligned} \text{長方形面積} &= f_{\text{avg}} \cdot 4 \\ &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx \\ &= f \text{ 在 } [-2, 2] \text{ 上所圍出區域的面積} \end{aligned}$$

此時兩交點的 x 座標為使得

$$f_{\text{avg}} = f(x)$$

的 x , 亦即,

$$\frac{8}{3} = 4 - x^2$$

由此導出

$$x^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

所以,

$$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

也就是說,

$$f\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = f_{\text{avg}} = \frac{1}{2 - (-2)} \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$$

此現象可推廣如下.

定積分的均值定理 (MVT for definite integral).

設 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續, 則至少有一數 $c \in [a, b]$ 使得

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x) dx$$

此乃相當於

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx = f_{\text{avg}} \quad (2)$$

亦即, 至少有一點 c 其函數值 $f(c)$ 等於平均值 f_{avg} .

(1) 為何稱此定理為 “定積分的均值定理”?

若 $F' = f$ 則由 FTC (part 2), (2) 式相當於過 c 的切線斜率

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

連結兩端點的割線斜率, 此乃一般的均值定理 (MVT).

(2) 證明 (略, 根據極值與中間值定理, 參考第 315 頁.)

四. 實體的體積 (The Volume of a Solid)

設 S 為一實體, 如圖示.

問. S 的體積 V 為何?

令 $A(x_k)$ 為實體 S 在點 x_k 的截面 (cross section) 的面積, 則

實體的第 k 片的體積

$$\begin{aligned} &\approx \text{以 } A(x_k) \text{ 為表面積, } \Delta x_k \text{ 為厚度的薄片的體積} \\ &= A(x_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

故,

$$V \approx \sum_{k=1}^n A(x_k) \Delta x_k$$

因此, 若 $A(x)$ 是可積的, 如 $A(x)$ 為連續, 則

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

例 4. 試求半徑為 r 的圓球體積.

<解> 截面: 一圓, 半徑為 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, 其面積

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

因此, 圓球的體積

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r A(x) dx \\ &= \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left(r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-r}^r \\ &= \pi \left[\left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) - \left(-r^3 + \frac{1}{3} r^3 \right) \right] \\ &= \pi \left(\frac{2}{3} r^3 + \frac{2}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

旋轉體 (Solid of Revolution)

(1) 繞 x -軸.

截面: 半徑爲

$$y = f(x)$$

的圓, 故截面積

$$A(x) = \pi[f(x)]^2$$

因此, 旋轉體的體積

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

(2) 繞 y -軸.

截面: 半徑爲

$$x = g(y)$$

的圓, 故其截面積

$$A(y) = \pi[g(y)]^2$$

因此, 旋轉體的體積

$$V = \int_c^d \pi[g(y)]^2 dy$$

例 5. 令

R : 由 $y = x^2$, 在 $[0, 2]$ 上所圍出的區域

S : 將 R 繞 x -軸而得的旋轉體

試求 S 的體積.

<解> 因為繞 x -軸旋轉, 繪圖後得知, 截面是半徑為

$$y = x^2$$

的圓. 因此, 旋轉體的體積

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi (x^2)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32}{5} \pi \end{aligned}$$

註. 此種求實心旋轉體的方法稱作圓碟法 (disk method), 因為截面是一個圓碟.

例 6. 令

R : 由 $y = \sqrt{x}$ 與 $y = x/2$ 所圍出的區域

S : 將 R 繞 x -軸而得的旋轉體

試求 S 的體積.

<解> 經由繪圖，對區域 R 及旋轉體 S 初步了解後，需執行下列二步驟.

(1) 求交點 (決定積分的上下界). 令

$$\sqrt{x} = \frac{x}{2}$$

兩邊平方後，得

$$4x = x^2$$

因此，

$$x = 0, 4$$

(2) 根據圖形，旋轉體 S 的體積

$$\begin{aligned} V &= (\text{由 } y = \sqrt{x} \text{ 繞出的旋轉體體積}) \\ &\quad - (\text{由 } y = x/2 \text{ 繞出的旋轉體體積}) \\ &= \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx - \int_0^4 \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx \\ &= \pi \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^4 - \pi \cdot \frac{1}{12} x^3 \Big|_0^4 \\ &= 8\pi - \frac{16}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

註. 此種求空心旋轉體的方法稱作墊片法 (washer method), 因為截面是一墊片 (空心圓碟).

例 7. 令

R : 由 $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$ 與 $y = \ln x$
所圍出的區域

S : 將 R 繞 y -軸而得的實體

試求 (a) R 的面積與 (b) S 的體積.

<解> 經由繪圖, 對 R 與 S 有初步的了解後, 需先求出
交點: 令

$$2 = \ln x$$

得

$$x = e^2$$

另外, 令

$$0 = \ln x$$

得

$$x = 1$$

(a) 根據圖形, 以水平的方式 (對 y -軸分割) 求 R 的面積較容易, 因為只需一個積分式子. 故需要求出圍出區域 R 的左右函數. 首先, 由

$$y = \ln x$$

導出

$$\text{右函數} : x = e^y$$

由圖形, 很明顯地

$$\text{左函數} : x = 0$$

另外, 對 y 積分的範圍為

$$0 \leq y \leq 2$$

因此, R 的面積

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (e^y - 0) dy \\ &= e^y \Big|_0^2 \\ &= e^2 - 1 \end{aligned}$$

(b) 因為繞 y -軸, 故截面的半徑為

$$x = e^y, \quad 0 \leq y \leq 2$$

因此, S 的體積

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (e^y)^2 dy \\ &= \pi \int_0^2 e^{2y} dy \\ &= \frac{\pi}{2} e^{2y} \Big|_0^2 \\ &= \frac{\pi}{2} (e^4 - 1) \end{aligned}$$

五. 曲線求長法 (Rectification of Curves)

給定曲線 $(x, f(x))$, $a \leq x \leq b$.

問. 曲線的長度 L 為何?

答. 設 $y = f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上為連續可微 (continuously differentiable, 亦即, $f'(x)$ 是連續的). 接著, 以

$$P = [x_0, x_1, \dots, x_n]$$

分割 $[a, b]$. 然後連結對應的點, 形成線段

$$\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_{k-1}P_k}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$$

並以這些線段長度的和 L_P 估計曲線的長度 L , 得

$$\begin{aligned} L &\approx L_P \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \left(\overline{P_{k-1}P_K} \text{ 的長} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \quad (\text{由畢氏定理}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta x_k)^2 [f'(c_k)]^2} \\ &\quad (\text{根據 MVT, 如圖示}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2} \Delta x_k \end{aligned}$$

此乃連續函數

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

在閉區間 $[a, b]$ 上的黎曼和. 因此, 令

$$\|P\| \rightarrow 0 \text{ (亦即, 愈分愈細)}$$

得

$$\begin{aligned} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2} \Delta x_k \\ = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \end{aligned}$$

所以曲線的長度可定義如下.

定義. 當 $y = f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上可微, 且 $f'(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上也連續, 則由 a 到 b 的曲線 $y = f(x)$ 的長度

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

註. 令

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

則

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \end{aligned}$$

定義

$$ds \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

爲畢氏定理的無窮小式 (infinitesimal form), 又稱作弧長微分式 (arc length differential), 如圖示. 故, 弧長

$$L = \int_a^b ds$$

相當於無窮小線段長的累積和.

例 8. 試求曲線 $y^2 = x^3$, $y \geq 0$, 在 x 介於 $5/9$ 與 $21/9$ 間的長度 L .

<解> 當 $5/9 \leq x \leq 21/9$,

$$y^2 = x^3, y \geq 0$$

相當於

$$y = x^{3/2} \stackrel{\text{令}}{=} f(x)$$

微分後，得

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

且在閉區間 $[5/9, 21/9]$ 亦上連續.

所以，曲線長度

$$\begin{aligned} L &= \int_{5/9}^{21/9} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2} dx \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_{x=5/9}^{21/9} \\ &= \frac{8}{27} \left[\left(1 + \frac{21}{4}\right)^{3/2} - \left(1 + \frac{5}{4}\right)^{3/2} \right] \\ &= \frac{8}{27} \left[\left(\frac{5}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^3 \right] \\ &= \frac{8}{27} \left[\frac{125}{8} - \frac{27}{8} \right] \\ &= \frac{98}{27} \end{aligned}$$

例 9. 試求曲線

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$$

由 $x = 1$ 到 $x = e$ 的長度 L .

<解> 微分後, 得

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$$

且在閉區間 $[1, e]$ 亦上連續.

所以, 曲線長度

$$\begin{aligned} L &= \int_1^e \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^e \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}} dx \\ &= \int_1^e \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}} dx \\ &\quad \text{(將根號內的式子完全平方, 即配方)} \\ &= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^e \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx \\ &= \left. \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \ln x \right|_1^e \\ &= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}(e^2 + 1) \end{aligned}$$

例 10. 試列出但不必計算雙曲線 (hyperbola)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

由 $x = 1$ 到 $x = 2$ 的曲線長 L .

<解> 根據曲線長度的公式, 須先微分, 得導函數

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

因此, 曲線長度

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

但是被積函數的反導函數是一相當複雜的函數 (可透過數學軟體, 如 Maple, 看看它的式子), 故求 L 的準確值是不實際的事, 一個替代的方式是用數值方法 (以後單元的內容) 求 L 的近似值.

註. 通常當

$$1 + [f'(x)]^2$$

無法像例 9 可完全平方時, 求 L 的準確值會是一件相當複雜又不實際的事, 此時需要以數值方法求其近似值.

註. 定積分的均值定理的嚴格證明: 因為 f 在 $[a, b]$ 上連續, 故由極值定理, 存在絕對最小值 m 與 絕對最大值 M , 即

$$m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$$

接著, 由定積分的不等式, 得

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

同除 $b-a$, 得

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

最後, 由中間值定理, 存在一個介於產生 m 與 M 的 x 值間的數 c , 如圖示, 當然 $c \in [a, b]$, 使得

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

即

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

註. 例 10 的不定積分

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

由數學軟體 Maple 得出的式子爲

$$\begin{aligned}
 & (-1/4 + 1/4 i) \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}} x \cdot \\
 & \left[\sqrt{2} x^4 + \sqrt{2} + i \sqrt{2} x^4 + i \sqrt{2} \right. \\
 & \quad \left. - 4 i \sqrt{1 - i x^2} \sqrt{1 + i x^2} x \cdot \right. \\
 & \quad \text{EllipticF} \left((1/2 + 1/2 i) x \sqrt{2}, i \right) \\
 & \quad \left. + 4 i \sqrt{1 - i x^2} \sqrt{1 + i x^2} x \cdot \right. \\
 & \quad \left. \text{EllipticE} \left((1/2 + 1/2 i) x \sqrt{2}, i \right) \right] \cdot \\
 & \quad \sqrt{2} (x^4 + 1)^{-1}
 \end{aligned}$$