單元 26: 分部積分
(積分形式的乘法規則)
(課本 §7.2)

設 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 均為 x 的可微函數, 則根據乘法規則

$$(uv)' = u'v + uv'$$

由此導出

$$uv' = (uv)' - u'v$$

兩邊積分, 得

$$\int uv'\,dx = \int (uv)'\,dx - \int u'v\,dx$$

因為 uv 是 $(uv)'$ 的一反導函數, 故

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx \tag{1}$$

令微分式

$$du = u'dx \text{ 以及 } dv = v'dx$$

則 (1) 式相當於

$$\int udv = uv - \int vdu$$

此乃另一積分技巧, 稱作分部積分 (integration by parts), 定義如下.

分部積分: 若 $u(x)$, $v(x)$ 均為可微函數, 則

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

或

$$\int udv = uv - \int vdu$$

精神: 將原被積函數改成另一簡單形式的被積函數

關鍵: 將原被積函數分成適當的 u 與 dv. 選取 u 的原則是容易微分, 得一簡單型式的導函數 u'. 選取 dv 的原則是容易積分, 得一簡單型式的反導函數 (不定積分) v. 最後, vu' $(= vdu)$ 容易被積分出. 適當選取的能力與直覺, 是需要從多練習的當中漸漸地培養出.

例 1. 試求不定積分

$$\int x \sin x \, dx$$

<解> 若被積函數中沒有 x, 則有直接可用的積分規則, 很容易地求出定積分, 因此需要處理造成困難的 x. 可行的方法乃令其為 u, 在分部積分時, 對 u 微分, 就可將其去掉. 同時令 dv 為剩餘的部分, 而這也是容易積分的.

這樣的選取, 以目前來看似乎是正確的, 詳細的推導過程如下: 令

$$u = x \;\Rightarrow\; du = dx$$

$$dv = \sin x dx \;\Rightarrow\; v = \int \sin x dx = -\cos x$$

因此, 根據分部積分,

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= \int u\,dv \\ &= uv - \int vdu \\ &= -x\cos x - \int -\cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

例 2. 試求不定積分

$$\int x\ln x\,dx$$

<解> 略看之下, 是 $\ln x$ 造成積分的困難, 而且不能用代入法, 故採用分部積分 (by parts). 令 u 爲造成困難的部分, 希望透過微分而能將其去掉, 其餘的部分爲 dv, 亦即,

$$u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x dx \;\Rightarrow\; v = \int x dx = \frac{1}{2}x^2$$

因此,

$$\begin{aligned}
\int x \ln x \, dx &= \int u \, dv \\
&= uv - \int v \, du \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} \, dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C
\end{aligned}$$

例 3. 試計算定積分

$$\int_0^1 xe^{-x} \, dx$$

<解> 也是一樣, 是 x 造成積分的困難, 故令

$$u = x \;\Rightarrow\; du = dx$$

以及

$$dv = e^{-x}dx \;\Rightarrow\; v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$$

因此，根據分部積分，得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{-x}\,dx &= \int_0^1 u\,dv \\
&= \left[uv - \int v\,du\right]_{x=0}^{1} \\
&= \left[-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right]_{x=0}^{1} \\
&= -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^1 \\
&= \left(-e^{-1} - e^{-1}\right) - (-1) \\
&= 1 - 2e^{-1}
\end{aligned}
$$

例 4. 試求不定積分

$$\int \ln x\,dx$$

<解> 沒有直接對 $\ln x$ 積分的規則，故勢必令其爲 u，剩餘的部分爲 dv，而採用分部積分的技巧，亦即，令

$$u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x}\,dx$$

以及

$$dv = dx \;\Rightarrow\; v = \int dx = x$$

而得

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int u\,dv \\ &= uv - \int v\,du \\ &= x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx \\ &= x\ln x - \int 1\,dx \\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

例 5. 試求不定積分

$$\int \tan^{-1} x\,dx$$

<解> 因爲沒有直接對 $\tan^{-1} x$ 積分的規則, 但卻有微分的規則, 故很顯然地必須令其爲 u, 剩餘的部分爲 dv, 並採用分部積分的技巧, 也就是說, 令

$$u = \tan^{-1} x \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{1+x^2}dx$$

以及

$$dv = dx \;\Rightarrow\; v = \int dx = x$$

而得

$$\int \tan^{-1} x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

接著代入相關的量, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= x\tan^{-1}x-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx\\
&= x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx\\
&= x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{w}\,dw\\
&\quad \left(\text{代入法: }\begin{array}{c} w=1+x^2\\ dw=2x\,dx\end{array}\right)\\
&= x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln|w|\\
&= x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C\\
&= x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C
\end{aligned}$$

例 6. (重複使用分部積分). 試計算定積分

$$\int_0^1 x^2e^x\,dx$$

<解> 先求出不定積分: 根據累積的經驗, 一個適當的選取爲

$$u=x^2 \ \Rightarrow\ du=2xdx$$

$$dv = e^x dx \;\Rightarrow\; v = \int e^x\,dx = e^x$$

因此,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x\,dx &= uv - \int v\,du \\ &= x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx\end{aligned}$$

因爲還有一個 x 出現在被積函數內 (但次方已由 2 降爲 1), 此乃提示再用一次分部積分, 故令

$$u = x \;\Rightarrow\; du = dx$$

以及

$$dv = e^x dx \;\Rightarrow\; v = e^x$$

可得

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x\,dx &= x^2 e^x - 2\left[x e^x - \int e^x\,dx\right] \\ &= x^2 e^x - 2\left[x e^x - e^x + C\right] \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C\end{aligned}$$

最後, 根據 FTC (part 2),

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^x\,dx &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x\Big|_0^1 \\ &= (e - 2e + 2e) - (2) \\ &= e - 2\end{aligned}$$

例 7. (重複使用分部積分). 試求不定積分

$$\int e^x \cos x \, dx$$

<解> 很明顯地無法使用代入法, 因此嘗試使用分部積分. 至於如何選取 u 與 dv, 此題沒有任何差異, 故以異於一般的選取, 令

$$u = e^x \;\Rightarrow\; du = e^x dx$$

$$dv = \cos x dx \;\Rightarrow\; v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

而得

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= uv - \int v du \\ &= e^x \sin x - \int (\sin x) e^x dx\end{aligned}$$

還是有一個三角函數出現在被積函數內, 但由 $\cos x$ 變成 $\sin x$. 似乎暗示著, 再用一次分部積分會得到原被積函數的型式, 然後也許可用簡單的方法求出不定積分. 所以, 令

$$u = e^x \;\Rightarrow\; du = e^x dx$$

$$dv = \sin x dx \;\Rightarrow\; v = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

可得

$$\int e^x \cos x \, dx$$
$$= e^x \sin x - \left[-e^x \cos x + \int \cos x e^x dx \right]$$
$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

等號右邊的不定積分剛好是原式的 -1 倍, 故移項後, 得

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x)$$

因此,

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$

註 1. 若第二次的選取不是 $u = e^x,\ dv = \sin x dx$, 而是

$$u = \sin x,\ dv = e^x dx$$

則

$$du = \cos x dx,\ v = e^x$$

而得

$$\int e^x \cos x \, dx$$
$$= e^x \sin x - \left[\sin x e^x - \int \cos x e^x dx \right]$$
$$= e^x \sin x - e^x \sin x + \int e^x \cos x \, dx$$

一正確但卻無用的式子, 因爲各項互相抵銷, 得出 $0 = 0$ 的恆等式.

註 2. 累積的經驗:

(1) 若不定積分的型式爲

$$\int P(x)\sin ax\,dx,\quad \int P(x)\cos ax\,dx$$

或

$$\int P(x)e^{ax}\,dx$$

時, 其中 $P(x)$ 爲一多項式, 則令

$$u = P(x)$$

$$dv = \sin axdx,\ \cos axdx,\ \text{或}\ e^{ax}dx$$

並重複使用分部積分.

(2) 若被積函數內有

$$\ln x,\ \sin^{-1}x,\ \text{或}\ \tan^{-1}x$$

時, 令

$$u = \ln x,\ \sin^{-1}x,\ \text{或}\ \tan^{-1}x$$

$$dv = \text{剩下的部分}$$

例 8. 試求下列各項積分.

(a) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\ln\sqrt{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \ln(\sqrt{x}+1)\,dx$

(c) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$

<解> (a) 首先根據對數函數的性質, 可將原式改寫成

$$\frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{x}\ln x dx$$

接著根據累積的經驗 (2), 令

$$u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = \sqrt{x}dx \;\Rightarrow\; v = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

則

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{1/2}\,dx\right]_1^4 \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^4 \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\cdot 8\ln 4 - \frac{4}{9}\cdot 8\right) - \left(0 - \frac{4}{9}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{16}{3}\ln 4 - \frac{28}{9}\right] \\
&= \frac{8}{3}\ln 4 - \frac{14}{9}
\end{aligned}$$

(b) 先以代入法，令

$$y = \sqrt{x} + 1 \;\; \Rightarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

得

$$2\sqrt{x}dy = dx \text{ 或 } 2(y-1)dy = dx$$

並將原式轉換成一個較熟悉的式子，即

$$\begin{aligned}
&\int \ln(\sqrt{x}+1)\,dx \\
&\qquad = \int \ln y \cdot 2(y-1)\,dy \\
&\qquad = 2\left[\int y\ln y dy - \int \ln y dy\right] \qquad (2)
\end{aligned}$$

接著, 求等號右邊的第一個不定積分: 令

$$u = \ln y \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{y}\,dy$$

以及

$$dv = y dy \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{2}y^2$$

得

$$\begin{aligned}\int y \ln y\, dy &= uv - \int v du \\ &= \frac{1}{2}y^2 \ln y - \int \frac{1}{2}y\, dy \\ &= \frac{1}{2}y^2 \ln y - \frac{1}{4}y^2 + C \qquad (3)\end{aligned}$$

然後求第二個不定積分: 令

$$u = \ln y \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{y}dy$$

以及

$$dv = dy \;\Rightarrow\; v = y$$

得

$$\begin{aligned}\int \ln y dy &= y \ln y - \int dy \\ &= y \ln y - y + C \qquad (4)\end{aligned}$$

最後, 由 (2), (3), (4) 式, 並將 $\sqrt{x}+1$ 代入 y, 得

$$\begin{aligned}
&\int \ln(\sqrt{x}+1)\,dx \\
&= 2\left(\frac{1}{2}y^2\ln y - \frac{1}{4}y^2 - y\ln y + y + C\right) \\
&= y^2\ln y - \frac{1}{2}y^2 - 2y\ln y + 2y + C \\
&= (\sqrt{x}+1)^2\ln(\sqrt{x}+1) - \frac{1}{2}(\sqrt{x}+1)^2 - \\
&\quad 2(\sqrt{x}+1)\ln(\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}+1) + C
\end{aligned}$$

(c) 無法用代入法 (因爲被積函數中沒有 $\ln x$ 的導函數 $1/x$), 故用分部積分, 令

$$u = \cos(\ln x) \ \Rightarrow\ du = -\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx$$

以及

$$dv = dx \ \Rightarrow\ v = x$$

得

$$\begin{aligned}
\int \cos(\ln x)\,dx &= uv - \int v\,du \\
&= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx
\end{aligned}$$

雖然等號右邊還是一個相同難度的被積函數, 但已從 cos 變成了 sin, 此暗示再使用一次分部積分, 可得出原被積

函數的型式, 而可用代數的方法解之. 所以, 令

$$u = \sin(\ln x) \;\Rightarrow\; du = \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx$$

以及

$$dv = dx \;\Rightarrow\; v = x$$

得

$$\begin{aligned}&\int \cos(\ln x)\,dx\\ &\quad = x\cos(\ln x) + \left[x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx\right]\end{aligned}$$

將等號右邊的不定積分移項後, 得

$$2\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$$

因此,

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right] + C$$

例 9. 縮減公式 (Reduction formula). 試證

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$$

註. 等號右邊被積函數中的次方比原被積函數中的次方減少了 1, 故繼續使用此縮減公式, 最後會得到一個只有 e^x 的被積函數, 而完成整個的積分過程.

<證明> 令

$$u = x^n \;\Rightarrow\; du = nx^{n-1}dx$$

以及

$$dv = e^x dx \;\Rightarrow\; v = e^x$$

故由分部積分, 得

$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$$

舉例,

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^x \, dx &\stackrel{n=3}{=} x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x \, dx \\
&\stackrel{n=2}{=} x^3 e^x - 3 \left[x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \right] \\
&\stackrel{n=1}{=} x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \left[x e^x - \int e^x dx \right] \\
&= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C
\end{aligned}$$