

單元 31：積分表

(課本 §7.7)

積分表分成 6 大類型的積分：

I. 基本函數 (公式 1 - 公式 8)：

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$\int \sin dx = -\cos x + C$$

⋮

II. 有理函數 (公式 9 - 公式 14)：

$$\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln|ax+b| + C$$

⋮

III. 被積函數含 $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, 或 $\sqrt{x^2 - a^2}$
(公式 15 - 公式 18)

IV. 被積函數含三角函數 (公式 19 - 公式 26)

V. 被積函數含指數函數 (公式 27 - 公式 31)

VI. 被積函數含對數函數 (公式 32 - 公式 38)

使用原則 (注意事項):

(i) 先辨別被積函數屬於哪一類型.

(ii) 經由展開，長除法，配方法，代入法等運算過程，將原有的被積函數化成與公式完全相同後，才可套用公式.

以例說明如下：

例 1. 試求

$$\int \sqrt{3 - x^2} dx$$

<解> 因為被積函數 $\sqrt{3 - x^2}$ 是屬於第三類型中的 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 故觀察相關的公式後, 如下的公式 17 (取負號) 與原式完全吻合:

$$\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 \pm x^2} + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} dx \right)$$

故, 令 $a^2 = 3$ 後, 直接使用公式 17, 可得

$$\int \sqrt{3 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{3 - x^2} + 3 \int \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}} dx \right)$$

接著等號右邊的積分也是屬於第三類型, 且與如下的公式 15 完全一樣:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

因此, 取 $a^2 = 3$ 後, 直接代公式 15, 可得

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{3 - x^2} + 3 \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} \right) + C$$

例 2. 試求

$$\int \sin(3x) \cos(4x) dx$$

<解> 因為被積函數為三角函數，故屬於第四類型，經觀察後，如下的公式 26 完全吻合：

$$\begin{aligned} \int \sin(ax) \cos(bx) dx &= \\ -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad a^2 &\neq b^2 \end{aligned}$$

因此，令 $a = 3$ 且 $b = 4$ 後，直接使用公式 26，可得

$$\begin{aligned} \int \sin(3x) \cos(4x) dx &= \\ = -\frac{\cos(7x)}{14} - \frac{\cos(-x)}{-2} + C & \\ = -\frac{\cos 7x}{14} + \frac{\cos x}{2} + C & \end{aligned}$$

例 3. 試求

$$\int x^2 e^{3x} dx$$

<解> 被積函數含有指數函數，故屬於第五類型，經比對相關的公式後，如下的公式 29 可適用：

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

這是一個減縮公式 (reduction formula), 每使用一次，需再積分的 x 次方項就減少 1 個幕次，直至 x 次方項完全消失，最後再對剩下的指數函數積分。

令 $a = 3$ 且 $n = 2$ 後，直接使用公式 29，可得

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

接著針對等號右邊的積分，可再使用一次公式 29，或直接使用如下的公式 28：

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$$

所以，令 $a = 3$ 並直接使用公式 28，可得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left[\frac{e^{3x}}{9}(3x - 1) \right] + C \\ &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{27} e^{3x}(3x - 1) + C\end{aligned}$$

例 4. 試求

$$\int e^{2x} \sin(3x - 1) dx$$

<解> 因為被積函數內含有指數函數，比對第五類型的相關公式後，如下的公式 30 與原式最相似，差別在於公式

內是 \sin 函數的 “ b 倍積分變數”，而原式內卻是 \sin 函數的 “積分變數的倍數，再減去一個常數”：

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + C$$

故不能直接使用公式，而需要透過如下的代入法，將原式轉換成與公式完全一樣的型式，才能使用公式 30：令

$$u = 3x - 1 \Rightarrow du = 3dx, \quad x = \frac{u+1}{3}$$

則

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin(3x - 1) dx &= \int e^{2(u+1)/3} \cdot \sin u \cdot \frac{1}{3} du \\ &= \frac{1}{3} e^{2/3} \int e^{2u/3} \sin u du \end{aligned}$$

此時，上式中的積分與公式 30 完全吻合，故令 $a = 2/3$ 以及 $b = 1$ 後，直接用公式 30，可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{3} e^{2/3} \left[\frac{e^{2u/3}}{4/9 + 1} \left(\frac{2}{3} \sin u - \cos u \right) \right] + C \\ &= \frac{3}{13} e^{2/3} e^{2(3x-1)/3} \left[\frac{2}{3} \sin(3x - 1) - \cos(3x - 1) \right] + C \end{aligned}$$

經化簡後，

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \\ &\frac{3}{13}e^{2x} \left[\frac{2}{3} \sin(3x - 1) - \cos(3x - 1) \right] + C \end{aligned}$$

例 5. 試求

$$\int \frac{x^2}{9+x^2} dx$$

<解> 被積函數是一有理函數，故檢視第二類型有關有理函數的積分公式後，得知需先經過下列的除法後，才能確認出適當可用的公式：首先

$$\frac{x^2}{9+x^2} = \frac{x^2 + 9 - 9}{9+x^2} = 1 - \frac{9}{9+x^2}$$

因此，

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \left(1 - \frac{9}{9+x^2} \right) dx \\ &= x - 9 \int \frac{1}{9+x^2} dx \end{aligned}$$

接者比對第二類型的積分公式後，等號右邊的積分完全與如下的公式 13 一樣：

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

所以，令 $a^2 = 9$ 後，得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= x - 9 \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) \right] + C \\ &= x - 3 \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + C\end{aligned}$$

例 6. 試求

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} dx$$

<解> 被積函數含有二次多項式的開平方根，故應屬於第三類型。但第三類型中的被積函數均未含 x 的一次項，然而原式中的被積函數卻有 x 的一次項。處理這類問題的技巧是，先將二次多項式配方，再以代入法化簡，則可比對出適用的積分公式，過程如下：

配方法：

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x - 1)^2 - 4$$

代入法：令

$$u = x - 1 \Rightarrow du = dx$$

可得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 - 4}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 4}} du\end{aligned}$$

因此，得出上式中的積分與如下的公式 16 (取負號) 完全吻合：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

最後，令 $a^2 = 4$ ，並根據公式 16，

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \ln \left| u + \sqrt{u^2 - 4} \right| + C \\ &= \ln \left| x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 - 4} \right| + C \\ &= \ln \left| x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 3} \right| + C\end{aligned}$$