單元 36: 矩陣
(課本 §9.2)

一 $m \times n$ 矩陣 (matrix)

$$A \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{簡記}}{=} [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}}$$

一. 基本矩陣運算

定義 1. 設 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ 為二個 $m \times n$ 矩陣, 則 $A = B$ 若且為若

$$a_{ij} = b_{ij},\ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

定義 2. 令 $C = A + B$ 則 C 為一 $m \times n$ 矩陣, 且

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

性質: 根據矩陣加法的定義以及實數的性質, 得

(i) $A + B = B + A$

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(iii) 令 $\mathbf{0} = [0]_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}}$ 稱作零矩陣 (zero matrix).
則 $A + \mathbf{0} = A$.

定義 3. 設 $A = [a_{ij}]$ 爲一 $m \times n$ 矩陣, c 爲一純量 (scalar), 則純量積

$$cA = [ca_{ij}]_{1\le i\le m,\, 1\le j\le n}$$

例 1. 令

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

且

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

則

$$\begin{aligned} & A+2B-3C \\ = & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

定義 4. 設 $A = [a_{ij}]$ 爲一 $m \times n$ 矩陣, 則 A 的轉置矩陣 (transpose) $A' = [a'_{ij}]$ 滿足

$$a'_{ij} = a_{ji}$$

亦即, $A' =$ 將 A 的列 (rows) 與行 (columns) 交換.

例 2. 試求

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ (稱作行向量, column vector)}$$

與

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ (稱作列向量, row vector)}$$

的轉置矩陣.

<解> 根據轉置矩陣的定義,

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \ (3 \times 2 \text{ 矩陣})$$

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \ (1 \times 2 \text{ 矩陣, 又稱作列向量})$$

且

$$C' = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \ (2 \times 1 \text{ 矩陣, 又稱作行向量})$$

二. 矩陣乘法

定義. 設 $A = [a_{ij}]$ 是一 $m \times l$ 矩陣, $B = [b_{ij}]$ 爲一 $l \times n$ 矩陣, 則

$$C \stackrel{\text{def}}{=} AB$$

爲一 $m \times n$ 矩陣, 且對於 $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

亦即, $c_{ij} =$ A 的第 i 列與 B 的第 j 行中對應元 (entry) 的乘積和.

註. AB 有意義, 必需要 A 的行數 $(l) = B$ 的列數 (l), 而乘積爲一 (A 的列數) $\times$ (B 的行數) 的矩陣.

例 3. 設

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \ (2 \times 3 \text{ 矩陣})$$

且

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \ (3 \times 4 \text{ 矩陣})$$

則

$$C = AB = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 & 0 \\ -5 & -2 & -11 & 7 \end{bmatrix} \ (2 \times 4 \text{ 矩陣})$$

但 BA 卻沒定義 (因爲 B 的行數 $4 \neq A$ 的列數 2).

註. 矩陣乘法的次序 (order) 是關鍵的, 是需要考慮的. 一般而言,

$$A \times B \neq B \times A$$

例 4. (a) 設

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

且

$$B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

則

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2-1+0 \end{bmatrix} \\ &= [1] \ (1\times 1 \text{ 矩陣}) \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ (3\times 3 \text{ 矩陣}) \end{aligned}$$

故,

$$AB \neq BA$$

(b) 設

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

且

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

則

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (零矩陣)}$$

以及

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

因此, 也得到與 (a) 相同的結果,

$$AB \neq BA$$

註. 例 4 (b) 顯示出一個現象: 兩個非 $\mathbf{0}$ 矩陣的乘積可能爲一 $\mathbf{0}$ 矩陣, 這是實數沒有的性質.

矩陣乘法與加法的性質:

(i) $(A+B)C = AC + BC$ (假設有符合矩陣乘法定義的適當行數與列數)

(ii) $A(B+C) = AB + AC$

(iii) $(AB)C = A(BC)$

(iv) $A\mathbf{0} = \mathbf{0}A = \mathbf{0}$

定義 1. 設 A 為一方陣 (square matrix, 亦即, 行數等於列數的矩陣). A 的 k 次方

$$A^k \overset{\text{def}}{=} A^{k-1}A = AA^{k-1} = \underbrace{AA\cdots A}_{k\ \text{項}}$$

定義 2. n 階單位方陣 (identity matrix)

$I_n \overset{\text{def}}{=}$ 由左上角至右下角對角線 (diagonal) 上的元 (entries) 均為 1 且其餘各元均為 0 的矩陣

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} (n \times n \text{ 矩陣})$$

當矩陣的大小 n 明顯時, 通常以 I 取代 I_n.

單位矩陣的性質:

(i) 設 A 爲一 $m \times n$ 矩陣, 則

$$I_m \times A = A \times I_n = A$$

此乃稱 I 爲單位矩陣的原因.

(ii) 對任意的 $k \geq 1$,

$$I^k = I$$

例 5. (矩陣方程式). 設 A 爲 2×2 矩陣; X 爲 2×1 矩陣, 則矩陣方程式

$$AX = X$$

相當於

$$(A - I_2)X = \mathbf{0}$$

爲何如此? 等號兩邊同減 X, 得

$$AX = X$$

相當於

$$AX - X = \mathbf{0}$$

根據單位矩陣的性質, 上式又相當於

$$AX - I_2X = \mathbf{0}$$

最後, 根據矩陣乘法的分配律性質, 得

$$(A - I_2)X = \mathbf{0}$$

注意乘法的次序 (order): $(A - I_2)$ 乘在 X 的左邊.

線性方程式系統與矩陣方程式的關係:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

相當於

$$AX = B$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (m \times n) \text{ 矩陣}$$

稱作線性系統的係數矩陣,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ (n \times 1) \text{ 矩陣}$$

以及

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \ (m \times 1) \text{ 矩陣}$$

舉例,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 6x_3 &= 7 \end{aligned}$$

相當於

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

因此, 解線性方程式系統 $\Leftrightarrow$ 解 $AX = B$.

問. 如何求解?

答. 有如下的兩種方法:

(1) 高斯消去法.

(2) 以反矩陣 A^{-1} (若存在的話) 求解, 得

$$X = A^{-1}B$$

說明如下.

三. 反矩陣 (Inverse Matrices)

回顧: 解

$$5x = 10$$

相當於兩邊同乘 $5^{-1} = \frac{1}{5}$ (5 的倒數), 得

$$5^{-1} \cdot 5x = 5^{-1}10$$

根據實數乘法的結合律, 由上式得

$$(5^{-1}5)x = 5^{-1}10$$

因爲 5 與 5^{-1} 互爲乘法的倒數, 故

$$x = 2$$

推廣: 希望上述的方法亦適用於矩陣方程式中, 亦即, 解

$$AX = B$$

相當於找到一個矩陣 A^{-1} 使得

$$A^{-1}A = I$$

則

$$AX = B$$

相當於兩邊同乘 A^{-1} 後, 而得

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

再根據矩陣乘法的結合律, 上式相當於

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

最後, 根據 A^{-1} 的定義, 可得

$$IX = A^{-1}B$$

因此, 由單位矩陣的定義,

$$X = A^{-1}B$$

定義. 設 $A = [a_{ij}]$ 爲一 n 階方陣. 若存在一 n 階方陣 B 使得

$$AB = BA = I_n$$

則稱 B 爲 A 的反矩陣 (inverse matrix), 並記成

$$A^{-1}$$

註 1. 若 A 有反矩陣, 則稱 A 爲可逆的 (invertible) 或不奇異的 (nonsingular); 否則稱 A 爲奇異的 (singular).

註 2. 若 A 是可逆的 (invertible 或 nonsingular), 則其反矩陣是唯一的, 亦即, 若矩陣 B, C 同爲 A 的反矩陣則 $B = C$.

<證> 根據單位矩陣的定義,

$$\begin{aligned} B &= BI_n \\ &= B(AC) \ (C \text{ 爲反矩陣, 故 } AC = I_n) \\ &= (BA)C \ (\text{乘法結合律}) \\ &= I_nC \ (B \text{ 爲反矩陣, 故 } BA = I_n) \\ &= C \end{aligned}$$

註 3. 若 A 爲可逆的, 則

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

<證> 因爲 A^{-1} 爲 A 的反矩陣, 故

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

上式亦可看成: 將 A 乘在 A^{-1} 的左右兩邊均得出 I_n, 故根據反矩陣的定義, A^{-1} 的反矩陣為 A, 亦即,

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

註 4. 若 A, B 同為 n 階的可逆矩陣, 則

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

<證> 將 $B^{-1}A^{-1}$ 乘在 AB 的左邊, 得

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= ((B^{-1}A^{-1})A)B \\ &= (B^{-1}(A^{-1}A))B \\ &= (B^{-1}I_n)B \\ &= B^{-1}B = I_n\end{aligned}$$

同理, 將 $B^{-1}A^{-1}$ 乘在 AB 的右邊, 得

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= ((AB)B^{-1})A^{-1} \\ &= (A(BB^{-1}))A^{-1} \\ &= (AI_n)A^{-1} \\ &= AA^{-1} = I_n\end{aligned}$$

所以, 根據反矩陣的定義,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

註 5. 如何求反矩陣 A^{-1}?

分別從兩種情況討論:

情況 1. 二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

根據定義, 需要找 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ 使得

$$AB = I$$

也就是說,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

此乃相當於解

$$\begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} &= 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} &= 0 \end{aligned}$$

以及解

$$\begin{aligned} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} &= 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} &= 1 \end{aligned}$$

其中 b_{11}, b_{21}, b_{12}, 與 b_{22} 爲待解的未知數. 因此, 亦相當於以高斯消去法 (列運算) 作用在增廣矩陣上:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_{11} \\ 0 & 1 & b_{21} \end{array}\right] \tag{1}$$

以及

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_{12} \\ 0 & 1 & b_{22} \end{array}\right] \tag{2}$$

因爲增廣矩陣的左邊均相同, 故可將 (1) 式與 (2) 式合併成

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 & b_{21} & b_{22} \end{array}\right]$$

而得

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

實際解之, 得

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

其中

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

稱作 A 的行列式 (determinant).

結論: 若

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

滿足

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

則 A 是可逆的 (invertible) 且

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

亦即, A^{-1} = 將 A 除以 $\det A$, 對調 A 中對角線上的元, 且 A 中非對角線上的元素變號.

註. 推廣: 設 A 爲一 n 階方陣, 則 A 是可逆的 (或 nonsingular) 若且爲若

$$\det A \neq 0$$

此處不列出 $\det A$ 的公式, 因爲當 $n \geq 3$ 時太複雜. 可由數學軟體求得.

情況 2. 3 階或高階方陣.

執行列運算在增廣矩陣上:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots$$

$$\cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]$$

可得,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

此處不列公式, 以例說明如下.

例 6. 試求下列各方陣的反矩陣 (若存在的話).

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

以及

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

<解> 因為

$$\det A = (3 \cdot 4) - (5 \cdot 2) = 2 \neq 0$$

故

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

又

$$\det B = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0$$

所以, B^{-1} 不存在.

因為 C 為一 3 階矩陣, 故可執行列運算於增廣矩陣上, 而求得 C^{-1}, 過程如下.

首先列出增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

經由列運算: (第 1 列 $\times 2 -$ 第 2 列), (第 1 列 $+$ 第 3 列), 分別取代第 2 與 第 3 列, 得

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

再執行列運算: (第 2 列 $\times -1$), (第 3 列 $\times -\frac{1}{2}$), 分別取代第 2 與第 3 列後, 以新的 (第 2 列 $+$ 第 1 列) 取代第 1 列, 得

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

最後執行列運算: (第 3 列 $\times -2 +$ 第 1 列), (第 3 列 $\times -3 +$ 第 2 列), 分別取代第 1 與第 2 列, 得

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

此時增廣矩陣的左邊爲一單位矩陣, 故停止列運算, 得

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

註. 幾點結論及相關的延伸問題:

(1) 若 A 爲可逆的, 則 $AX = B$ 有唯一解
$X = A^{-1}B$.

(2) 當 $B = \mathbf{0}$ 時, $AX = \mathbf{0}$ 一定有解

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

稱作普通 (平凡) 解 (trivial solution).

(3) 當 A 爲可逆時, $AX = \mathbf{0}$ 只有普通解 (trivial sloution)

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4) 若 $AX = \mathbf{0}$ 有一解

$$X \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

時, 稱 X 爲一非普通解 (nontrivial solution).

問. 何時 $AX = \mathbf{0}$ 有非普通解 (nontrivail solution)?

定理. 設 A 爲一 n 階方陣, 則 $AX = \mathbf{0}$ 有非普通解 (nontrivial solution) 若且爲若 A 是奇異的 (singular), 亦相當於

$$\det A = 0$$

例 7. 令

$$A = \begin{bmatrix} a & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

試求 a 使得 $AX = \mathbf{0}$ 有一非普通解, 並求出一個非普通解.

<解> 由定理知, 欲得非普通解, a 需滿足

$$\det A = 2a - 18 = 0$$

因此,

$$a = 9$$

求非普通解相當於執行列運算於增廣矩陣上, 亦即, 高斯消去法, 過程如下: 首先列出增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{cc|c} 9 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

接著經由列運算: (第一列 $-$ 第二列 $\times$ 3) 取代第二列, 得

$$\left[\begin{array}{cc|c} 9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

最後, 根據反代入法, 由第二列得,

$$0 \cdot x_2 = 0 \text{ (恆成立)}$$

所以,

$$x_2 = t, \ t \in R$$

將其代入第一列, 得

$$x_1 = \frac{1}{9}(0 - 6t) = -\frac{2}{3}t, \ t \in R$$

因此, 解爲

$$\left\{\left(-\frac{2}{3}t, \ t\right): \ t \in R\right\}$$

取 $t = 1$ 得一個非普通解 (nontrivial solution):

$$x_1 = -\frac{2}{3}, \ x_2 = 1$$

四. 應用: The Leslie Matrix.

兩種族群成長模型, 如下述.

(1) 簡單離散時間無限制成長模型 (simple discrete time unrestricted growth model):

特徵爲繁殖期 (breeding season) 非整年而是一年的某一段時間 (故稱離散時間).

設時間 t 的單位: 代 (generation, 一種離散時間). 令

$$N(t) = \text{第 } t \text{ 代的族群大小}$$

且 $R (\geq 0)$ 爲由一代至下一代的族群固定成長率 (constant growth rate of population from generation to generation), 即

$$R = \text{每一個體在下一代中的繁殖數 (子孫數)}$$

由此可導出

$$N(t+1) = RN(t), \ t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

其中 $N(0) = N_0$.

問. $N(t)$ 爲何?

答. 根據 (3) 式, 以遞迴的方式逐次推導, 得

$$\begin{aligned} N(1) &= RN(0) \\ N(2) &= RN(1) = R(RN(0)) = R^2N(0) \\ N(3) &= RN(2) = R(R^2N(0)) = R^3N(0) \\ &\vdots \\ N(t) &= R^tN(0) \end{aligned}$$

亦即, 前面提過的指數成長模型 (exponential growth model), 且長期行爲 (long-term behavior)

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} N(t) &= \lim_{t\to\infty} R^tN(0) \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{若 } R > 1 \\ & \text{(亦即, 無限制模型)} \\ N(0), & \text{若 } R = 1 \\ 0, & \text{若 } R < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 離散時間年齡層結構模型 (discrete-time, age-structured model):

特徵爲考慮繁殖中的年齡因素, 又稱作 Leslie 模型. 此模型探討的目標 (在長期觀察下) 爲

(1) 整個族群的成長率

(2) 每一個年齡層 (age class) 在整個族群中所占的比率

為簡單計, 僅考慮雌性 (females) 個體, 且假設如下:

(i) 以某一繁殖期 (breeding season) 作基準, 在此期間生下的個體為 0 歲. 至第二個繁殖期時, 第一個繁殖期生下的個體為 1 歲, 且成熟具繁殖能力, 其後代為 0 歲. 至第三個繁殖期時, 於前兩個繁殖期生下的個體分別為 2 歲與 1 歲, 且會分別繁殖出 0 歲的後代. 以此方式延續生存與繁殖, 其中每一個體只能存活至 3 歲, 且於繁殖出新一代 0 歲的個體後就死亡. 此外, 在每一繁殖期結束時都做個數調查 (census, 普查). 如圖示.

(ii) 沒有 4 歲或以上的個體.

(iii) 令 $N_x(t) =$ 在 t 時, 年齡為 x 的雌性個體數, $x = 0, 1, 2, 3; t = 0, 1, 2, \ldots,$ 得

$$N(t) = \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{bmatrix}$$

爲在 t 時, 每一年齡層 (age class) 中的雌性個體數所形成的行向量.

(iv) 假設年齡 0 至年齡 1 的存活率 (survival rate) 爲 40%, 年齡 1 至年齡 2 的存活率爲 30%, 且年齡 2 至年齡 3 的存活率爲 10%, 即

$$\begin{aligned} N_1(t+1) &= .4N_0(t) \\ N_2(t+1) &= .3N_1(t) \\ N_3(t+1) &= .1N_2(t) \end{aligned}$$

其中 $t = 0, 1, 2, \ldots$.

(v) 在繁殖期中, 每一

年齡 0 個體 $\overset{\text{平均}}{\Rightarrow}$ 0 個新生雌性個體
年齡 1 個體 $\Rightarrow$ 2 個新生雌性個體
年齡 2 個體 $\Rightarrow$ 1.5 個新生雌性個體
年齡 3 個體 $\Rightarrow$ 0 個新生雌性個體

也就是說,

$$N_0(t+1) = 2N_1(t) + 1.5N_2(t)$$

其中 $t = 0, 1, 2, \ldots$.

合併 (iv) 與 (v) 得族群演變的動態 (dynamics) 結構如下: 對於 $t = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\begin{bmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 0 \\ .4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{bmatrix}$$

其中等號右邊的 4 階矩陣稱作 Leslie 矩陣, 記成 L.

因此, 上式可簡記成

$$N(t+1) = LN(t),\ t = 0, 1, 2, \ldots$$

一個在型式上與簡單離散無限制成長模型一樣的式子.

舉例. 設在 t 時的年齡層分布 (age distribution) 如下: $N_0(t) = 1000$, $N_1(t) = 200$, $N_2(t) = 100$, $N_3(t) = 10$, 則

$$\begin{aligned} N(t+1) &= \begin{bmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 0 \\ .4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 200 \\ 100 \\ 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

乘開後, 得

$$N(t+1)=\begin{bmatrix} 2(200)+1.5(100) \\ (.4)(1000) \\ (.3)(200) \\ (.1)(100) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 550 \\ 400 \\ 60 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} N(t+2) &= LN(t+1) \\ &= \begin{bmatrix} 2(400)+(1.5)(60) \\ (.4)(550) \\ (.3)(400) \\ (.1)(60) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 890 \\ 220 \\ 120 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

Leslie 模型的推廣.

假設

(i) 族群分成 $(m+1)$ 個年齡層, 亦即, 年齡 0, 年齡 1, ..., 年齡 m.

(ii) 在每一個繁殖期 (breeding season) 結束時, 做個數調查 (census, 普查).

(iii) 年齡 i 的存活率 (survival rate, survival probability) 爲

$$p_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

亦即,

$$\begin{aligned} N_1(t+1) &= p_0 N_0(t) \\ N_2(t+1) &= p_1 N_1(t) \\ N_3(t+1) &= p_2 N_2(t) \\ &\vdots \\ N_m(t+1) &= p_{m-1} N_{m-1}(t) \end{aligned}$$

(iv) 每個年齡 i 的雌性個體平均生 F_i 個雌性後代 (female offspring), $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, 亦即,

$$N_0(t+1) = F_0 N_0(t) + F_1 N_1(t) + \cdots + F_m N_m(t)$$

則可得 $(m+1) \times (m+1)$ 的 Leslie 矩陣

$$L = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_{m-2} & F_{m-1} & F_m \\ p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{m-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{m-1} & 0 \end{bmatrix}$$

其中第一列含平均生產個數 (birth numbers):

$$F_0, F_1, \ldots, F_{m-1}, F_m$$

子對角線 (下對角線, subdiagonal) 含存活率 (survival rates):

$$p_0, p_1, \cdots, p_m, p_{m-1}$$

且其餘位置的各元 (entry) 均為 0.

因此, 族群演變的動態結構如下:

$$N(t+1) = LN(t),\ t = 0, 1, 2, \ldots$$

例 7. 設一族群的 Leslie 矩陣如下:

$$L = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1.5 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

試解釋此矩陣, 並求由 1000 個年齡 0 的雌性個體開始, 在 2 個繁殖期後的族群結構.

<解> (a) 解釋: 根據 Leslie 矩陣的性質 (涵義),

(i) 族群分成 3 個年齡層, 亦即, 年齡 0, 年齡 1, 與年齡 2.

(ii) 平均而言,

每一年齡 0 雌性個體可生產 5 個新生雌性個體
每一年齡 1 雌性個體可生產 7 個新生雌性個體
每一年齡 2 雌性個體可生產 1.5 個新生雌性個體

(iii) 各年齡層的存活率:

年齡 0 的存活率爲 0.2
年齡 1 的存活率爲 0.4

亦即,

$$\begin{aligned} N_1(t+1) &= 0.2N_0(t) \\ N_2(t+1) &= 0.4N_1(t) \end{aligned}$$

(b) 首先, 根據假設

$$N(0) = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此,

$$\begin{aligned} N(1) &= LN(0) \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1.5 \\ .2 & 0 & 0 \\ 0 & .4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} N(2) &= LN(1) \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1.5 \\ .2 & 0 & 0 \\ 0 & .4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5000 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26400 \\ 1000 \\ 80 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 8. (穩定年齡層分布, stable age distribution)
設 Leslie 矩陣

$$L = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ .08 & 0 \end{bmatrix}$$

且

$$N(0) = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

試問此族群的長期行爲 (long-term behavior) 爲何?

<解> 根據族群演變的動態結構

$$N(t+1) = LN(t),\ t = 0, 1, 2, \ldots$$

可得

$$\begin{aligned} N(1) &= LN(0) = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ .08 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 150 + 200 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(2) &= LN(1) \\ &= \begin{bmatrix} (1.5)(350)+2(8) \\ (.08)(350) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 541 \\ 28 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(3) &= LN(2) = \begin{bmatrix} 868 \\ 43 \end{bmatrix} \\ N(4) &= LN(3) = \begin{bmatrix} 1388 \\ 69 \end{bmatrix} \\ N(5) &= LN(4) = \begin{bmatrix} 2221 \\ 111 \end{bmatrix} \\ N(6) &= LN(5) = \begin{bmatrix} 3553 \\ 178 \end{bmatrix} \\ N(7) &= LN(6) = \begin{bmatrix} 5685 \\ 284 \end{bmatrix} \\ &\vdots \end{aligned}$$

結論:

(i) 在 t 時, 總族群大小

$$N_0(t)+N_1(t),\ t=0,1,2,\ldots$$

如下:

t	0	1	2	3
$N_0(t)+N_1(t)$	200	358	569	911

t	4	5	6
$N_0(t)+N_1(t)$	1457	2332	3731

t	7	$\cdots$	$\uparrow$
$N_0(t)+N_1(t)$	5969	$\cdots$	$\uparrow$

(ii) 年齡 0 的成長率

$$q_0(t)=\frac{N_0(t)}{N_0(t-1)},\ t=1,2,3,\ldots$$

如下:

t	1	2	3	4
$q_0(t)$	$\frac{350}{100}=3.5$	$\frac{541}{350}=1.55$	$\cdots$	$\cdots$

t	5	6
$q_0(t)$	$\cdots$	$\frac{3553}{2221}=1.5997$

t	7	$\cdots$	$\uparrow$
$q_0(t)$	$\frac{5685}{3553}=1.6001$	$\cdots$	$\to 1.6$

年齡 1 的 成長率

$$q_1(t)=\frac{N_1(t)}{N_1(t-1)},\ t=1,2,3,\ldots$$

如下:

t	1	2
$q_1(t)$	$\frac{8}{100}=0.08$	$\frac{28}{8}=3.5$

t	3	4	5
$q_1(t)$	$\frac{43}{28} = 1.536$	$\cdots$	$\cdots$

t	6	7
$q_1(t)$	$\frac{178}{111} = 1.604$	$\frac{284}{178} = 1.596$

t	$\cdots$
$q_1(t)$	$\rightarrow 1.6$

註. 一個事實如下:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_0(t)}{N_0(t-1)} = \lim_{t\to\infty} \frac{N_1(t)}{N_1(t-1)} = 1.6$$

亦即, 年齡層 0 與 1 有共同的成長率, 此亦爲整個族群的成長率, 其解法在 §9.3 中.

(iii) 年齡 0 在整個族群中的比率

$$p(t) = \frac{N_0(t)}{N_0(t) + N_1(t)}$$

如下: 首先透過表格的觀察, 得

t	0	1
$p(t)$	$\frac{100}{200} = 0.5$	$\frac{350}{358} = 0.9777$

t	2	3	4	5
$p(t)$	$\frac{541}{569} = .9508$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

t	6	7
$p(t)$	$\frac{3533}{3731} = .9523$	$\frac{5685}{5969} = .9524$

t	$\cdots$
$p(t)$	$\rightarrow .9524 = 95.24\%$

此現象表示當 t 夠大時 (亦即, 經過夠長的時間 t 之後), 各年齡層在族群中所占的比率會維持固定 (如, 年齡 0 的比率 $=$ 95.2%, 年齡 1 的比率 $=$ 4.8%).

因此, 對應此固定比率而有的年齡層分布稱作穩定年齡層分布 (stable age distribution), 如

$$N(0) = \begin{bmatrix} 2000 \\ 100 \end{bmatrix}$$

或

$$N(0) = \begin{bmatrix} 3200 \\ 160 \end{bmatrix}$$

均爲穩定年齡層分布 (stable age distribution), 因爲

$$\frac{2000}{2100} = \frac{3200}{3360} = 95.24\%$$

註 1. 如何求穩定年齡層分布? 以如上的表格法不見得能找得到, 一個系統的方法會在 §9.3 中介紹.

註 2. 穩定年齡層分布的性質:

(i) 以穩定年齡層分布開始時, 在任何的 t 時, 年齡層的比率都維持固定, 如

$$N(0)=\begin{bmatrix}2000\\100\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{2000}{2100}=.9524$$

$$\begin{aligned}N(1)&=LN(0)\\&=\begin{bmatrix}1.5&2\\0.08&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2000\\100\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}3200\\160\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{3200}{3360}=.9524\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N(2)&=LN(1)\\&=\begin{bmatrix}1.5&2\\0.08&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3200\\160\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}5120\\256\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{5120}{5376}=.9524\end{aligned}$$

$$\vdots$$

(ii) 族群大小以一固定的族群成長率增加, 如

$$N(1)=\begin{bmatrix}3200\\1600\end{bmatrix}=1.6\begin{bmatrix}2000\\100\end{bmatrix}=1.6N(0)$$

$$N(2)=\begin{bmatrix} 5120 \\ 256 \end{bmatrix}=1.6\begin{bmatrix} 3200 \\ 1600 \end{bmatrix}=1.6N(1)$$

$$\vdots$$

$$N(t+1)=1.6N(t) \tag{4}$$

(iii) 穩定年齡層分布 N 滿足矩陣方程式:

$$LN=\lambda N \tag{5}$$

其中 $\lambda=1.6$, 此乃因爲根據 Leslie 矩陣所描述的族群動態以及 (4) 式, 對所有的 $t\geq 0$,

$$LN(t)=N(t+1)=\lambda N(t)$$

故,

$$LN(t)=\lambda N(t),\ t\geq 0$$

註 3. 定義. 稱滿足 (5) 式的 N 爲特徵向量 (eigenvector), λ 爲特徵值 (eigenvalue). 因此, 在 §9.3 中, 從矩陣方程式

$$LN=\lambda N$$

著手, 找出穩定年齡層分布 N 以及族群成長率 λ.