

單元 5: 夾擠定理與三角的極限

(課本 §3.4)

定理 1. 比較定理 (Comparison Theorem). 設 $c \in (a, b)$ 且對所有在 (a, b) 中 c 以外的點 x ,

$$f(x) \leq g(x)$$

則

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

如圖示.

定理 2. 夾擠定理 (Squeeze or Sandwich Theorem). 設 $c \in (a, b)$ 且對所有在 (a, b) 中 c 以外的點 x ,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

若

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

則

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$$

如圖示.

例 1. 試求

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

<解> 首先設法找出夾擠原式的上, 下函數, 如下述:

$$\begin{aligned} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| &= |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \\ &\leq |x| \end{aligned}$$

(因為 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$). 所以,

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$$

又 $|x|$ 的圖形, 如圖示, 或由註 5 的定義證明.

得,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

且

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = -\lim_{x \rightarrow 0} |x| = -(0) = 0$$

因此, 根據夾擠定理,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

兩個三角極限 (Trigonometric limits):

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

註 1. 兩個三角極限的解釋:

1. 極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

意謂著當 x 靠近 0 時,

$$\sin x \approx (\text{近似於, 相當於}) x$$

如圖示.

2. 極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

意謂著當 x 靠近 0 時,

$$1 - \cos x \ll (\text{遠小於}) x$$

如圖示.

註 2. 代入 0, 得

$$\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$

以及

$$\frac{1 - \cos 0}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

上二式均爲未定式 $\frac{0}{0}$, 但卻有不一樣的結果, 故稱

$$\frac{0}{0}$$

爲未定式 (indeterminate form).

<證> (1) $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ 可僅考慮 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 接著再分別考慮兩種情況.

情況 1: $0 < x < \frac{\pi}{2}$. 如圖示, 可得

$$BD \text{ 的弧長} = x$$

$$\left(\text{因爲 } \frac{\text{弧長}}{x} = \frac{2\pi(1)}{2\pi} = 1\right)$$

$$\overline{OA} = \cos x$$

$$\overline{AD} = \sin x$$

$$\overline{BC} = \tan x$$

又

$$\triangle OAD \text{ 的面積} \leq \text{扇形 } OBD \text{ 的面積} \leq \triangle OBC \text{ 的面積}$$

此乃相當於

$$\frac{1}{2}(\overline{OA})(\overline{AD}) \leq \frac{1}{2}(\overline{OB})^2 x \leq \frac{1}{2}(\overline{OB})(\overline{BC})$$

$$(\text{因為 } \frac{\text{扇形面積}}{x} = \frac{\pi(OB)^2}{2\pi} = \frac{1}{2}(\overline{OB})^2)$$

又相當於

$$\frac{1}{2} \sin x \cos x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x$$

因為 $\frac{1}{2} \sin x > 0$, 各項同除以 $\frac{1}{2} \sin x (> 0)$ 後, 可得

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

又因上式各項均大於 0, 顛倒後, 可得

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

因為

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$$

且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

所以, 由夾擠定理,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

情況 2: $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. 令 $z = -x$, 則

$$x \rightarrow 0^- \Leftrightarrow z = -x \rightarrow 0^+$$

所以,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-z)}{-z} \\ &\quad (\text{因為 } x = -z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{-\sin z}{-z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\sin z}{z} \\ &= 1, \text{ 根據情況 1} \end{aligned}$$

因此, 綜合情況 1 與情況 2, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(2) 根據 (1) 的結果及三角恆等式, 直接求極限. 首先, 將原式的分子, 分母同乘以 $1 + \cos x$, 並化簡, 得

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x} &= \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\ &= \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \end{aligned}$$

接著兩邊取極限，並調整等號右邊的分子，分母，得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) \\ &= 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 1 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

註 3. 極限為 1 時，顛倒後的極限還是 1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

註 4. 使用

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

的結果時，須注意分母的量與分子中代入 $\sin$ 函數的量要一樣才可以，因為在證明的當中僅要求同樣大小的量趨近於 0，至於速度則沒有要求。

例. 試求下列各極限：

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{x \sec x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 4x}$$

<解> (a) 根據註 4, 需要調整成相同的量後, 才可使用三角極限的結果, 調整及推導過程如下:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \\ &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \\ &= \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

(b) 須先調整成含 πx 的量後, 再計算, 過程如下:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \pi \sqrt{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \\ &= \pi \cdot \sqrt{0} \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

(c) 先將原式改寫成熟悉的正弦或餘弦函數後，再處理：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{x \sec x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x \frac{1}{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0\end{aligned}$$

(d) 先調整成相同的量後，再處理：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{4x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \\ &= \frac{7}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} \\ &= \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}\end{aligned}$$

註 5. 對任一 $\epsilon > 0$,

$$||x| - 0| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 0| < \epsilon \quad (1)$$

所以，對任一固定的 $\epsilon > 0$ ，取

$$\delta = \epsilon$$

可得，

$$\text{當 } 0 < |x - 0| < \delta (= \epsilon) \text{ 時}$$

由 (1) 式知，

$$||x| - 0| < \epsilon$$

因此, 由 ϵ - δ 定義,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

註 6. 證明

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

的方法, 除了例 1 比較面積外, 亦可考慮比較曲線長的方法, 即

$$AD \text{ 線段長} \leq BD \text{ 弧長} \leq BC \text{ 線段長}$$

另外, 也可考慮比較

$$\triangle OBD \text{ 的面積} \leq$$

$$\text{扇形 } OBD \text{ 的面積} \leq \triangle OBC \text{ 的面積}$$

的方法, 請自行嘗試, 並比較各種方法的差異.