單元 6: 在無窮遠的極限
(課本 §3.3)

當 $x \to \pm\infty$ 時的極限, 稱作在無窮遠的極限 (limits at infinity).

問. 如何求此種極限?

分兩類來探討:

第一類. 有理函數:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 爲多項式.

(i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

爲何成立? 如圖示, 或由表格都可得到此結果.

(ii) 推廣:

1. 對任一 $n > 0$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

當然, $x \to -\infty$ 時, 是考慮那些使 x^n 有意義的 n.

爲何成立? 因爲

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

2. 當 $n > m$,

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{x^m}{x^n} \text{ 爲何?}$$

直接代 $\pm\infty$:

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

另一類未定式, 故無法下結論.

解法: 分式上, 下同除 x^m, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^m/x^m}{x^n/x^m} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{n-m}} \\
&= \frac{1}{\pm\infty} = 0
\end{aligned}$$

其中 $n-m>0$, 故由推廣 1 得知.

結論: 當 $n>m$,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^m}{x^n}=0$$

雖然分子 x^m 與分母 x^n 都 $\to\pm\infty$, 但分母的量 $|x^n|\gg$ (遠大於) 分子的量 $|x^m|$, 故稱 x^n 支配 (凌駕, dominates) x^m.

註 1. 當 $n>m$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n}{x^m} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{n-m}}{1}\\ &= \frac{\pm\infty}{1}=\pm\infty\end{aligned}$$

此時, 分子的量 $|x^n|\gg$ 分母的量 $|x^m|$.

註 2. $\frac{0}{0}$ 是之前碰過的一個無法下結論的未定式, 其解法爲分解並消去公因子後, 再求極限.

例. 試求下列各項極限.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^3-3x^2+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-5x+6}{x^3-7x+1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-6x+8}{x^2-x+7}$

<解> 求有理函數在無窮遠的極限的典型做法爲: 分別提出分子與分母領導項 (leading term, 次數最高之項) 的 x 次數部分, 化簡後, 再根據上述推廣出的結果求極限. (或同除分母領導項的 x 次數部分即可.)

(a) 由分子提出 x^2, 分母提出 x^3, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}\\
&= 0\cdot\frac{1+0-0}{1-0+0}\\
&= 0\cdot\frac{1}{1}=0
\end{aligned}$$

觀察: 分子領導項的量 $|x^2| \ll$ 分母領導項的量 $|x^3|$, 亦即, 分母支配分子, 故極限 $\to 0$.

(b) 由分子提出 x^3, 分母提出 x^3, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(2-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}}{1-\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}} \\
&= \frac{2-0+0}{1-0+0} = 2
\end{aligned}$$

觀察: 分子領導項的量 $|x^3|$ = 分母領導項的量 $|x^3|$, 即數量上屬同等級, 故極限爲二領導項係數比.

(c) 將分子提出 x^4, 分母提出 x^2, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(1-\frac{6}{x^3}+\frac{8}{x^4}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{1-\frac{6}{x^3}+\frac{8}{x^4}}{1-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}} \\
&= \infty\cdot\frac{1-0+0}{1-0+0} \\
&= \infty\cdot 1 = \infty
\end{aligned}$$

觀察: 分子領導項的量 $|x^4| \gg$ 分母領導項的量

$|x^2|$, 亦即, 分子支配分母, 故極限 $\to \pm\infty$ (確實的正負號, 需小心地由化簡後的次數及係數決定).

(iii) 結論:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{若 } \deg(p) < \deg(q) \\ L\ (\neq 0 \text{ 的實數}), & \text{若 } \deg(p) = \deg(q) \\ \pm\infty, & \text{若 } \deg(p) > \deg(q) \end{cases}$$

此處 $\deg(p) = p(x)$ 的最高次數.

注意事項:

1. 只有在 $x \to \pm\infty$ 時, 才可用此結論的方法求極限.

2. 決定第三個結果中的 “$+$” 或 “$-$” 時要小心.

例 1. 試求下列各極限:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x+3x^2}{3x-5x^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+1}{x^7-9}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4+3x^2}{1-7x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-7x+6}{1-5x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$

<解> (a) 因爲分子的最高次數 $\deg(p)$ = 分母的最高次數 $\deg(q) = 2$, 故

$$\text{極限} = -\frac{3}{5}$$

(b) 因爲分子的最高次數 $\deg(p) = 3 <$ 分母的最高次數 $\deg(q)$ $(= 7)$, 故

$$\text{極限} = 0$$

或直接用典型的方法求之, 亦即, 將分子提出 x^3, 分母提出 x^7, 得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(-1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^7\left(1-\frac{9}{x^7}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^4}\cdot\frac{-1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{9}{x^7}} \\
&= 0\cdot\frac{-1+0}{1-0} = 0
\end{aligned}
$$

(c) 因爲 $\deg(p) > \deg(q)$, 故

$$\text{極限} = +\infty$$

註. 注意符號, 避免錯誤; 因爲

$$\text{分子的 } 3x^2 \to 3(-\infty)^2 = +\infty$$

且

$$\text{分母的 } -7x \to -7(-\infty) = +\infty$$

所以,

$$\text{符號} = \frac{+}{+} = +$$

或直接以典型的方法計算, 由分子提出 x^2, 分母提出 x 並化簡, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(\frac{4}{x^2}+3\right)}{x\left(\frac{1}{x}-7\right)} \\ &= \lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{\frac{4}{x^2}+3}{\frac{1}{x}-7} \\ &= -\infty\cdot\frac{0+3}{0-7} \\ &= -\infty\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)=+\infty \end{aligned}$$

(d) 因爲 $\deg(p) > \deg(q)$, 所以

$$\text{極限} = -\infty$$

其中

$$\text{分子的 } x^3 \to (-\infty)^3 = -\infty$$

且

$$\text{分母的 } -5x \to -5(-\infty) = +\infty$$

所以,

$$\text{符號} = \frac{-}{+} = -$$

或直接計算, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{7}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-5\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot \frac{1-\frac{7}{x^2}+\frac{6}{x^3}}{\frac{1}{x}-5} \\
&= (-\infty)^2 \cdot \frac{1-0+0}{0-5} \\
&= \infty \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\infty
\end{aligned}$$

(e) 首先示範一個錯誤的推導過程及結論如下. 因爲 $\deg(p) > \deg(q)$, 故

$$\text{極限} = \infty$$

錯, 因爲不是求在無窮遠的極限, 方法用錯了, 亦即, 整個推理邏輯是錯的, 即使湊巧得到了正確的答案, 也是錯誤的, 更何況答案是錯的.

正確的做法如下: 因爲是在求某一定點的極限, 故先代入此點觀察其變化, 再按需要, 做進一步的處理.

代入 1: 得

$$\frac{1-2+1}{1-1} = \frac{0}{0}: \text{ 未定式}$$

故需分解, 消去公因式, 再求極限. 所以,

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1}(x-1) \\
&\quad (\text{因爲 } x\to 1,\, x-1\neq 0) \\
&= 1-1=0
\end{aligned}$$

第二類. 指數函數:

$$e^x$$

觀察 e^x 的圖形, 如圖示, 得

結論:

1. $\lim_{x\to\infty} e^x = e^{\infty} = \infty$

2. $\lim_{x\to -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$

3. $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = e^{-\infty} = 0$

4. $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = e^{-(-\infty)} = e^{\infty} = \infty$

例 2. 羅吉斯成長函數 (logistic growth function) 爲一種描述族群母體大小 (size) 的函數. 對於 $t \geq 0$, 在 t 時的族群大小

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1\right) e^{-rt}}$$

其中 K, r 爲正常數.

特性: $N(t)$ 的成長速度 (rate of growth) 隨著母體大小的增大而遞減, 如圖示,

首先, 若

$$K > N(0)$$

時, 對所有的 $t > 0$,

$$N(t) < K$$

此乃因爲

$$\begin{aligned} \text{分母} &= 1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1\right) e^{-rt} \\ &= 1 + (+) \cdot (+) > 1 \end{aligned}$$

又初始大小 (initial size), 亦即, 在 $t = 0$ 時族群的大小等於

$$\begin{aligned} \frac{K}{1+\left(\frac{K}{N(0)}-1\right)e^{-r\cdot 0}} &= \frac{K}{1+\left(\frac{K}{N(0)}-1\right)} \\ &= N(0) \end{aligned}$$

長期行爲 (long-term behavior): 探討當時間夠久 (無限延伸) 後, 族群大小的演變情形, 亦即,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} N(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{K}{1+\left(\frac{K}{N(0)}-1\right)e^{-rt}} \\ &= \frac{K}{1+\left(\frac{K}{N(0)}-1\right)e^{-\infty}} \\ &= \frac{K}{1+\left(\frac{K}{N(0)}-1\right)0} \\ &= \frac{K}{1+0} = K \end{aligned}$$

註. K 稱作族群母體的承載量 (carrying capacity).

例 3. 試求下列各極限:

(a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{3e^x}{1-e^x}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \sin x$

<解> (a) 首先, 代 ∞, 得

$$\frac{\infty}{-\infty}$$

乃一未定式. 故同除造成問題的因子 e^x, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\frac{1}{e^x}-1} \\
&= \frac{3}{\frac{1}{\infty}-1} \\
&= \frac{3}{0-1} = -3
\end{aligned}$$

註: 未定式

$$\frac{0}{0} \text{ 與 } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

的處理方式: 一般而言, 同除造成問題 (trouble) 的因式.

(b) 代入 $-\infty$, 得

$$e^{-\infty}\sin(-\infty) = 0\cdot(\text{不存在})$$

另一種型態的未定式. 因爲不是註解中的那兩種已見過的型態, 需用另外的方法處理. 因爲原式中含有有界的函數 $\sin x$, 這提示我們可考慮嘗試夾擠定理, 過程如下: 首先,

$$|e^x \sin x| \leq e^x$$

此乃相當於

$$-e^x \leq e^x \sin x \leq e^x$$

又

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$$

且

$$\lim_{x\to-\infty} (-e^x) = -e^{-\infty} = -0 = 0$$

故, 由夾擠定理, 知

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \sin x = 0$$

練習題. 試以極限的 ϵ-δ 定義, 證明

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

以及

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$