單元 10: 微分的基本規則
(課本 §4.2 與 §4.3)

本單元先介紹 6 種求導函數的規則 (rules), 分述與舉例如下.

(1) 冪次規則 (Power Rule).

設 n 爲一正整數, 則

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

<證> 令 $f(x) = x^n$, 則根據定義

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

又根據二項定理的展開式,

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
= \;& \frac{1}{h}[(x+h)^n - x^n] \\
= \;& \frac{1}{h}\left[x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots \right. \\
& \left. + \binom{n}{n-1}x^1h^{n-1} + \binom{n}{n}h^n - x^n\right] \qquad (1)
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= C_k^n \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

所以, (1) 式相當於

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\bigg[nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots \\ &\qquad\qquad +nxh^{n-1}+h^n\bigg] \\ &= nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots \\ &\qquad\qquad +nxh^{n-2}+h^{n-1}\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^n) \\ &= \lim_{h\to 0}\bigg[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots \\ &\qquad\qquad +nxh^{n-2}+h^{n-1}\bigg] \\ &= nx^{n-1}+0+\cdots+0 \\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

(2) 純量積與加減法規則. 設二函數 f 與 g 在 x 均可微, 則

1. $\dfrac{d}{dx}\left[cf(x)\right] = c\dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right]$

   其中 c 爲一常數. (亦即, 可將純量積常數提出.)

2. $\dfrac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right] \pm \dfrac{d}{dx}\left[g(x)\right]$

   (亦即, 可逐項微分.)

<證> 由導函數的定義及極限的性質可證得, 略.

例 1. 試求下列各項的導函數.

(a) $y = 2x^4 - 3x^3 + x - 7$

(b) $y = t^3 - 8t^2 + 3t - \sqrt{\pi}$

(c) $f(r) = r^2\sqrt{2} - r^4 e^{0.3} + \sin\frac{\pi}{6}$

(d) $r(N) = N\left(1 - \frac{N}{10}\right)$

<解> (a) 逐項微分並將乘積中的純量提出, 可得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2\frac{d}{dx}(x^4) - 3\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(7) \\ &= 2 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 3x^2 + 1 \cdot x^0 - 0 \\ &= 8x^3 - 9x^2 + 1\end{aligned}$$

註. $\frac{dy}{dx}$ 讀作應變數 y 對自變數 x 的導函數.

(b) 同 (a), 逐項微分後, 可得

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 16t + 3$$

註. 此時自變數爲 t.

(c) 對自變數 r 逐項微分, 得

$$\begin{aligned}f'(r) &= \frac{df}{dr} \\ &= 2\sqrt{2}r - 4e^{0.3}r^3\end{aligned}$$

(d) 先展開, 得

$$r(N) = N - \frac{1}{10}N^2$$

再同 (c), 對自變數 N 逐項微分, 可得

$$
\begin{aligned}
r'(N) &= \frac{d}{dN}\left[N - \frac{1}{10}N^2\right] \\
&= 1 - \frac{1}{5}N
\end{aligned}
$$

例 2. 設 $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$. 試求 f 的圖形上與直線 $3x - y + 1 = 0$ 平行的切線 (tangent lines) 以及過切點的法線 (normal lines) (即, 與切線相互垂直的直線).

<解> f 在點 $(x, f(x))$ 的切線的斜率爲

$$f'(x) = 6x^2 - 3$$

切線與直線 $3x - y + 1 = 0$ (其斜率爲 3) 平行相當於要求

$$6x^2 - 3 = 3$$

解之, 得

$$x = 1,\ -1$$

對應的 y 坐標爲

$$y = 2 - 3 + 1 = 0 \text{ 及 } y = -2 + 3 + 1 = 2$$

因此, 有二切點

$$(1,0) \text{ 與 } (-1,2)$$

接著, 分別求過各點的切線與法線:

$(1,0)$: 切線爲

$$y-0=3(x-1)\Leftrightarrow y=3x-3$$

法線 $\left(\text{斜率}=-\frac{1}{3}\right)$ 爲

$$y-0=-\frac{1}{3}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$

$(-1,2)$: 切線爲

$$y-2=3(x+1)\Leftrightarrow y=3x+5$$

法線爲

$$y-2=-\frac{1}{3}(x+1)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

(3) 乘法規則 (Product Rule). 設 f 與 g 在 x 均可微. 則

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

令 $u = f(x)$, $v = g(x)$. 另一表示法爲

$$(uv)' = u'v + uv'$$

註 1. $(uv)' \neq u'v'$

註 2. 三個函數乘積的導函數的推廣爲

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] \\
&\quad = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + \\
&\qquad\qquad f(x)g(x)h'(x)
\end{aligned}$$

同理可類推出多個函數乘積的導函數.

<證> 令 $h(x) = f(x)g(x)$. 根據導函數的定義,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= h'(x) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

又如圖示,

$$\begin{aligned}
&h(x+\Delta x) - h(x) \\
&\quad = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) \\
&\quad = \text{斜線面積} = \text{I 的面積} + \text{II 的面積} \\
&\quad = [f(x+\Delta x) - f(x)]\, g(x) + \\
&\qquad\qquad [g(x+\Delta x) - g(x)]\, f(x+\Delta x)
\end{aligned}$$

所以,

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)\right]+ \\
&\quad \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}f(x+\triangle x)\right] \\
&= g(x)\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{\to f'(x)\ (\text{因爲 } f \text{ 可微})}+ \\
&\quad \underbrace{\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]}_{\to g'(x)\ (\text{因爲 } g \text{ 可微})}\cdot \\
&\quad \underbrace{\left[\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\right]}_{\to f(x)\ (\text{因爲 } f \text{ 連續})} \\
&= g(x)f'(x)+g'(x)f(x) \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

例 3. 求下列各項的導函數.

(a) $f(x)=(\sqrt{3}x^2+6x-1)(5-2x^3)$

(b) $g(s)=(2s^2-7s)^2$

<解> (a) 根據乘法規則,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{3}x^2+6x-1)'(5-2x^3)+ \\ &\qquad (\sqrt{3}x^2+6x-1)(5-2x^3)' \\ &= (2\sqrt{3}x+6)(5-2x^3)+ \\ &\qquad (\sqrt{3}x^2+6x-1)(-6x^2) \\ &= -10\sqrt{3}x^4-48x^3+6x^2+ \\ &\qquad 10\sqrt{3}x+30 \end{aligned}$$

(b) 首先將 $g(s)$ 改寫成二函數的乘積, 得

$$g(s)=(2s^2-7s)(2s^2-7s)$$

所以, 根據乘法規則,

$$\begin{aligned} g'(s) &= (2s^2-7s)'(2s^2-7s)+ \\ &\qquad (2s^2-7s)(2s^2-7s)' \\ &= 2(2s^2-7s)'(2s^2-7s) \\ &= 2(4s-7)(2s^2-7s) \end{aligned}$$

(4) 除法規則 (Quotient Rule). 設 f 與 g 在 x 均可微. 則

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

令 $u = f(x)$, $v = g(x)$ 爲二可微函數. 除法規則的另一表示法爲

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

<證> 略, 以後再證.

例 4. 令 $y = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 1}$. 根據除法規則,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(x^2+1)^2}\Big[(x^3 - 3x + 2)'(x^2 + 1) - \\ &\qquad (x^3 - 3x + 2)(x^2 + 1)'\Big] \\ &= \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + 1) - (x^3 - 3x + 2)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 3 - 2x^4 + 6x^2 - 4x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x^4 + 6x^2 - 4x - 3}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

(5) 冪次規則. 設 n 爲正整數, 則

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}\right] = -nx^{-n-1}$$

<證> 因爲 $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, 根據除法規則,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[x^{-n}\right] &= \frac{(1)'x^n - (1)(x^n)'}{(x^n)^2} \\ &= \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -nx^{n-1-2n} \\ &= -nx^{-n-1} \end{aligned}$$

(6) 冪次規則 (推廣型). 設 r 爲任一實數, 則

$$\frac{d}{dx}\left[x^r\right] = rx^{r-1}$$

<證> 略, 以後再證.

例 6. 試求下列各項的導函數.

(a) $y = \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \pi$

(b) $y = \sqrt{x}(x^2 - 1)$

(c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{\sqrt{x}}$

<解> 一個基本原則爲, 先將各項改寫成 cx^r 的型式後, 再用冪次規則求導函數.

(a) 首先可將 y 改寫成

$$y = x^{1/3} - x^{-1/2} + \pi$$

接著根據冪次規則, 得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{2}x^{-3/2} \\ &= \frac{2x^{5/6} - 3}{6x^{3/2}} \end{aligned}$$

(b) 直接用乘法規則, 或先將 y 改寫成

$$\begin{aligned} y &= x^{1/2}(x^2 - 1) \\ &= x^{5/2} - x^{1/2} \end{aligned}$$

再根據冪次規則, 得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{5}{2}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(c) 可直接用除法規則, 但過程繁雜. 或先將原式改寫成

$$f(x) = 2x^{3/2} - 5x^{1/2} + 3x^{-1/2}$$

再用冪次法則, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^{1/2} - \frac{5}{2}x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{-3/2} \\ &= \frac{6x^2 - 5x - 3}{2x^{3/2}} \end{aligned}$$

註. 導函數乘法規則的證明, 基本上就是加一項, 減一項, 再根據函數的可微性 (當然保證連續性) 在求量差商的極限過程中, 使用極限的性質推導而得; 可自行嘗試加, 減另一項

$$f(x)g(x + \Delta x)$$

的過程推導.