單元 16: 極值與均值定理
(課本 §5.1)

一. 局部極值 (Local Extrema)

觀察下面圖形:

註. 局部最小值 (local min), 局部最大值 (local max): 在局部範圍內是最小值, 最大值. 全面最小值 (global min), 全面最大值 (global max): 在全部範圍內是最小值, 最大值. 正式的定義如下.

定義. 設 f 定義在一集合 D 上, 亦即, f 的定義域爲 D.

(i) f 在 D 內的一個 c 點上有一局部 (相對) 最大值 (local maximum, realtive maximum) 若且爲若存在一 $\delta > 0$ 使得對所有的 $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap D$,

$$f(c) \geq f(x)$$

(ii) f 在 D 內的一個 c 點上有一局部 (相對) 最小值 (local minimum, relative minimum) 若且爲若存在一 $\delta > 0$ 使得對所有的 $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap D$,

$$f(c) \leq f(x)$$

註 1. 若 $D=[a,b]$, 則

(i) c: 內部點 (interior point), 如圖示. 則可找到夠小的 δ 使得 $(c-\delta,c+\delta)\subset D$. 所以,

$$(c-\delta,c+\delta)\cap D=(c-\delta,c+\delta)$$

(ii) c: 端點 (end point), 則有兩種可能.

1. $c=a$, 如圖示. 則存在夠小的 $\delta>0$ 使得

$$(c-\delta,c+\delta)\cap D=[a,c+\delta)$$

2. $c=b$, 如圖示. 則存在夠小的 $\delta>0$ 使得

$$(c-\delta,c+\delta)\cap D=(c-\delta,b]$$

註 2. 局部最大值或局部最小值統稱爲局部極值 (local extremum).

例 1. 令

$$f(x)=(x-1)^2(x+2),\ -2\le x\le 3$$

如圖示.

(a) 試以圖形求 $f(x)$ 的局部極值.

(b) 試求全面極值.

<解> (a) 有兩類局部極值, 分述如下:

(i) 發生在內部點:

1. 在 $x = -1$ 有局部最大值.

   因爲取 δ =0.1 時, 對所有的

   $$x \in (-1.1, -0.9) \cap D = (-1.1, -0.9)$$

   其函數值

   $$f(x) \leq f(-1)$$

2. 在 $x = 1$ 有局部最小值.

   因爲取 $\delta = 0.2$ 時, 對所有的

   $$x \in (0.8, 1.2) \cap D = (0.8, 1.2)$$

其函數値

$$f(x) \geq f(1)$$

(ii) 發生在端點:

1. 在 $x = -2$ 有局部最小値.

因爲取 δ =0.1 時, 對所有的

$$x \in (-2.1, -1.9) \cap D = [-2, -1.9)$$

其函數値

$$f(-2) \leq f(x)$$

2. 在 $x = 3$ 有局部最大値.

因爲取 $\delta = 0.1$ 時, 對所有的

$$x \in (-2.9, -3.1) \cap D = (2.9, 3]$$

其函數値

$$f(x) \leq f(3)$$

(b) 因爲 f 在閉區間 $[-2, 3]$ 上連續, 所以, 根據極値定理, 存在全面 (絕對) 極値.

問. 如何找?

因爲全面最小值一定是局部最小值, 所以, 局部最小值中最小的就是全面最小值. 因爲二個局部最小值分別爲

$$f(-2) = 0,\ f(1) = 0$$

均爲 0, 一樣小, 所以全面最小值爲 0, 發生在二個點

$$x = -2 \text{ (端點) 與 } x = 1 \text{ (內部點)}$$

同理, 因爲全面最大值一定是局部最大值, 所以, 局部最大值中最大的就是全面最大值. 因爲二個局部最大值分別爲

$$f(-1) = 4,\ f(3) = 20$$

其中 20 最大, 所以全面最大值爲 20, 只發生在一個點

$$x = 3 \text{ (端點)}$$

例 2. 令

$$f(x) = |x^2 - 4|,\ -2.5 \le x < 3$$

如圖示.

試由圖形求局部極值與全面極值.

<解> 觀察圖形, 可得

(1) 局部最小值: 發生在 $x=-2$ (內部點) 與 $x=2$ (內部點).

(2) 局部最大值: 發生在 $x=-2.5$ (端點) 與 $x=0$ (內部點).

註. 雖然對所有的 $x\in[2.9,3)$,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=5>f(x)$$

但 f 在 $x=3$ 未定義 (或者說 $x=3$ 好像是個局外人), 所以在 $x=3$ 不會有 (產生) 局部最大值.

全面最大值: 比較局部最大值

$$f(-2.5)=2.25,\ f(0)=4$$

以及未定義的右端點的左極限

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=5$$

此乃因爲在 $x=3$ 的左邊附近, $f(x)$ 任意靠近 5, 故需要考慮此極限.

其中 5 最大, 但 f 在 $x = 3$ 未定義. 因此, 沒有全面最大值.

註. 此結果與極值定理不抵觸, 因爲 $D = [-2.5, 3)$ 不是閉區間, 故不保證一定會有全面最大值與全面最小值.

全面最小值: 比較局部最小值

$$f(-2) = 0 \text{ 與 } f(2) = 0$$

均爲 0, 一樣小. 因此, 全面最小值爲 0, 發生在二個點

$$x = -2 \text{ 與 } x = 2$$

費馬定理 (Fermat's Theorem). 若 f 在一內部點 c 有局部極值且可微 (亦即, $f'(c)$ 存在), 則

$$f'(c) = 0$$

<證> 設 f 在 $x = c$ 有局部最大值 (同理可證當 f 在 $x = c$ 有局部最小值的情形). 則根據局部最大值的定義, 存在一 $\delta > 0$ 使得對所有的

$$x \in (c - \delta, c + \delta)$$

其函數值

$$f(x) \leq f(c) \tag{1}$$

又 $f'(c)$ 存在. 此乃推導出

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &\leq \lim_{x \to c^+} 0 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

上式中的不等號 $\leq$ 成立是因爲, 當 $x \to c^+$ 時, 分母

$$x - c > 0$$

且 x 會在 $(c - \delta, c + \delta)$ 內. 再根據 (1) 式, 當 $x \in (c - \delta, c + \delta)$ 時, 得分子

$$f(x) - f(c) < 0$$

故, 量差商

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{(-)}{(+)} < 0$$

同理, 當 $x \to c^-$ 時, 量差商

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{(-)}{(-)} > 0$$

故,

$$
\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \\
&\geq \lim_{x\to c^-} 0 = 0 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

合併 (2) 式與 (3) 式, 得

$$f'(c) \leq 0 \text{ 且 } f'(c) \geq 0$$

因此,

$$f'(c) = 0$$

註 1. 當 $f'(c)$ 存在時, "$f'(c) = 0$" 是 "f 在內部點 c 有局部極值" 的必要條件, 而非充分條件.

非充分條件的反例: 考慮

$$f(x) = x^3$$

則

$$f'(x) = 3x^2$$

所以,

$$f'(0) = 3(0)^2 = 0$$

但觀察如下的圖形:

得 f 在 $x=0$ 沒有局部極值 (亦即, 在 $x=0$ 既不產生局部最大值也不產生局部最小值). 也就是說,
"$f'(c)=0$" 不一定保證在 $x=c$ 有局部極值.

註 2. "$f'(c)=0$" 是必要條件乃等價於 "若 $f'(c)\neq 0$, 則在 $x=c$ 不會產生局部極值". 因此, 找局部極值只需針對那些 $f'(x)=0$ (有水平切線) 的內部點 x 來找, 也就是說, 有水平切線 ($\Leftrightarrow f'(x)=0$) 的內部點是產生局部極值的候選點 (candidate).

註 3. 局部極值也可能發生在不可微的點上, 如例 2 的點 $x=-2$ 與 $x=2$.

註 4. 局部極值也可能發生在端點上.

摘要. 如何找局部極值? 有下列三項僅需考慮的點:

1. 針對 $f'(x)=0$ 的內部點 x 著手, 這些 x 是候選點 (candidates) (故, 不一定都會產生局部極值, 需要進一步確認).

2. 檢查導函數不存在的點.

3. 檢查端點.

二. 均值定理 (The Mean Value Theorem)

考慮

$$f(x) = x^2,\ 0 \le x \le 1$$

過二點 $(0,0)$ 與 $(1,1)$ 的割線斜率爲

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

因爲 f 在 $(0,1)$ 內可微, 故在 $(0,1)$ 內的每一點都有切線. 根據圖形, 將此割線平行地向右下方移動時, 會與 f 的圖形相切於一點 $(c, f(c))$. 也就是說, 存在一

$$c \in (0,1)$$

使得

$$\text{過 } (c, f(c)) \text{ 的切線 } \parallel \text{ 過二端點的割線}$$

亦即,

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

這就是均值定理的內容.

問. c 爲何? 是否眞的存在? 還是僅是圖形顯示它的存在而已?

若 c 存在, 則根據其性質

$$f'(c) = 2c = 1$$

解之, 得

$$c = \frac{1}{2} \in (0, 1)$$

所以, c 確實存在. 另

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

因此, 與過二端點的割線平行的切線爲

$$y - \frac{1}{4} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

亦相當於

$$y = x - \frac{1}{4}$$

均值定理 (MVT). 若 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續且在開區間 (a, b) 上可微, 則至少有一 $c \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

亦即, 過點 $(a, f(a))$ 與 $(b, f(b))$ 的割線斜率 $=$ 過點 $(c, f(c))$ 的切線斜率.

註 1. 幾何意義: 在點 $(a, f(a))$ 與 $(b, f(b))$ 間至少存在一點 $(c, f(c))$, 使得過此點的切線與過 $(a, f(a))$ 與 $(b, f(b))$ 二點的割線平行.

註 2. 均值定理是一 "存在性" 定理, 只說明 c 的存在, 至於有幾個以及在哪裡就沒交代. (這就已經有許多重要的應用了!)

問. 如何證明均值定理? 先證明一特例 Rolle 定理. 再由 Rolle 定理證明均值定理.

Rolle 定理. 設 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續, 在開區間 (a, b) 上可微且 $f(a) = f(b)$, 則至少存在一 $c \in (a, b)$ 使得

$$f'(c) = 0$$

註. 爲何 Rolle 定理是均值定理的一特例? 因爲在多出的條件 $f(a) = f(b)$ 下, Rolle 定理的結論爲

$$f'(c) = 0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

其中第一項與第三項剛好就是均值定理的結論.

<Rolle 定理的證明> 分成二個情況個別討論:

情況 **1.** f 在 $[a, b]$ 上爲常數. 則對所有的 $x \in (a, b)$,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\text{常數}) = 0$$

所以, 定理成立.

情況 **2.** f 在 $[a, b]$ 上不爲常數. 因爲 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續, 所以由極值定理, 存在全面最大值與全面最小值. 又因爲 f 在 $[a, b]$ 上不爲常數, 則此二極值不相等 (否則, 全面最大值等於全面最小值會導致 f 爲常數, 而與假設矛盾).

因爲 $f(a) = f(b)$, 故在端點最多只能有一個全面極值 (最大值或最小值, 但不是二者). 因此, 在 (a, b) 內至少有一內部點 c 會產生全面極值.

又全面極值也是局部極值. 所以在內部點 c 所產生的全面極值也是一局部極值. 因此, 根據費馬定理, 產生局部極值的內部點 c, 其導函數 $f'(c) = 0$, 故得證.

<均值定理的證明> 爲了能使用 Rolle 定理, 必須定義一新函數使其在端點的函數值相等. 故, 定義新函數

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

由圖形知, 其概念乃是將 $f(x)$ 值下降一個合於 x 的比例的量

$$(f(b) - f(a))\frac{x - a}{b - a}$$

因爲原函數 $f(x)$ 與 $(x - a)$ 均在閉區間 $[a, b]$ 上連續且在開區間 (a, b) 上可微, 因此新定義的函數 $F(x)$ 也在 $[a, b]$ 上連續且在 (a, b) 上可微. 又

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$$

且

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$$

因此, 在二端點的值 $F(a) = F(b)$.

故, 根據 Rolle 定理, 至少存在一 $c \in (a, b)$ 使得 $F'(c) = 0$. 此乃相當於

$$F'(x)\Big|_{x=c} = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Bigg|_{x=c} = 0$$

因此, 由最後一個等式得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

推論 1. (Corollary 1). 若 f 閉區間 $[a,b]$ 上連續且在開區間 (a,b) 上可微並使得對所有的 $x\in(a,b)$, 導函數 $f'(x)$ 均滿足

$$m\le f'(x)\le M$$

則

$$\underbrace{m(b-a)}_{\text{下界}}\le f(b)-f(a)\le\underbrace{M(b-a)}_{\text{上界}}$$

亦即, 可用來估計 $f(b)-f(a)$ 的上下界.

<證> 根據均值定理, 存在 $c\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

又因為 $b-a>0$ 且根據假設 $m\le f'(c)\le M$, 可導出

$$m(b-a)\le f'(c)(b-a)\le M(b-a)$$

此乃相當於

$$m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$$

例 3. 試證

$$|\sin b-\sin a|\le|b-a|$$

<證> 因爲 $\sin x$ 在整個實數線上是連續且可微的, 所以滿足均值定理的條件. 故對任意二實數 a 與 b, 都存在一 c 介於 a 與 b 之間, 使得

$$\sin b-\sin a=(\cos c)(b-a)$$

將上式兩邊取絕對值, 得

$$|\sin b-\sin a|=|\cos c|\cdot|b-a|\le|b-a|$$

推論 2. 若 f 在閉區間 $[a,b]$ 上連續且在開區間 (a,b) 上可微並對所有的 $x\in(a,b)$, 其導函數 $f'(x)=0$. 則 f 在閉區間 $[a,b]$ 上恆爲常數.

<證> 對任一 $x\in(a,b]$, 閉區間 $[a,x]\subseteq$ 閉區間 $[a,b]$, 所以, f 在閉區間 $[a,x]$ 上連續且在開區間 (a,x) 上可微, (因爲 f 在更大的範圍 $[a,b]$ 內有上述性質), 有就是說, 滿足均值定理的條件. 故根據均值定理, 存在 $c\in(a,x)$, 使得

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)=0\ (\text{由假設條件})$$

所以由上式, 對任一 $x \in (a,b]$, $f(x) = f(a)$. 因此, 對所有的 $x \in [a,b]$, $f(x) = f(a)$, 亦即, f 在 $[a,b]$ 上恆爲常數.

例 4. 設 f 在 $[-1,1]$ 上連續且在 $(-1,1)$ 上可微, 以及 $f(1) = 2$ 且對所有的 $x \in (-1,1)$, $f'(x) = 0$. 試求 $f(x)$.

<解> 因爲 f 滿足推論 2 的條件, 故 f 爲一常數. 又因爲 $f(1) = 2$, 所以可推導出對所有的 $x \in [-1,1]$, $f(x) = 2$.

例 5. (§5.1 練習題 56). 設

$$f(x) = f_0 e^{rx}, \ x \in R$$

則根據連鎖規則,

$$f'(x) = f_0 \cdot r e^{rx} = r f(x)$$

亦即, $f(x)$ 滿足微分方程式

$$\frac{df}{dx} = r f(x) \tag{4}$$

以及初始值 $f(0) = f_0$. 試證

$$f(x) = f_0 e^{rx}$$

是微分方程式 (4) 的唯一解, 亦即, 若 r 爲一常數, 且 f 是一可微函數並滿足

$$\frac{df}{dx} = rf(x),\ x \in R \tag{5}$$

以及初始值 $f(0) = f_0$, 則

$$f(x) = f_0 e^{rx},\ x \in R$$

<證> 設 f 是 (5) 的解且定義一新函數

$$F(x) = f(x)e^{-rx},\ x \in R$$

根據乘法規則與連鎖規則,

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x)e^{-rx} + f(x)\left(e^{-rx}\right)' \\ &= f'(x)e^{-rx} + f(x)\cdot(-r)e^{-rx} \\ &= e^{-rx}[f'(x) - rf(x)] \\ &= 0,\ x \in R \end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃因爲 f 滿足微分方程式 (5). 因此, 根據推論 2, $F(x)$ 在整個實數線上恆爲一常數. 故,

$$F(x) = F(0) = f(0)e^{-r\cdot 0} = f(0) = f_0$$

接著, 根據上式以及新函數的定義, 得

$$f_0 = f(x)e^{-rx}$$

因此, 兩邊同乘以 e^{rx}, 就證得

$$f(x) = f_0 e^{rx}$$