單元 23: 微積分基本定理
(課本 §6.2)

一. 微積分基本定理 (第一部分)

定理. (FTC, part 1). 若函數 f 在閉區間 $[a,b]$ 上連續. 定義

$$F(x)=\int_a^x f(u)du,\ a\le x\le b$$

(根據前一單元的定理, $F(x)$ 是存在, 有意義的.) 則此一新定義的函數 $F(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上連續, 在開區間 (a,b) 上可微 且

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

亦即,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du=f(x)$$

註 1. 直觀上的說明 (嚴格的證明乃利用極值定理, 中間值定理, 請參看第 297-298 頁): 對於 $a\le x\le b$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_a^x f(u)du\\ &= f(u) \text{ 在 } [a,x] \text{ 上所圍出區域的符號面積}\end{aligned}$$

如圖示, 此乃一面積問題.

問. $F(x)$ 的變化如何? 首先,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(u)du-\int_a^{x} f(u)du\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x} f(u)du+\int_x^{x+h} f(u)du\right.\\
&\qquad\left.-\int_a^{x} f(u)du\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)du \qquad (1)
\end{aligned}$$

此乃一切線問題. 又當 $h\to 0$ 時,

$$\begin{aligned}
&\int_x^{x+h} f(u)du\\
&\quad = f(u) \text{ 在 } [x,x+h] \text{ 所圍出區域的符號面積}\\
&\quad \approx f(x)h \qquad (2)
\end{aligned}$$

所以, 合併 (1) 式與 (2) 式, 得

$$\begin{aligned}
\frac{dF(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)du\\
&\approx \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x)h]\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

註 2. 由等式

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = f(x)$$

得知積分與微分互為反運算, 如圖示.

註 3. FTC (part 1) 的推廣:

(a) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_a^{h(x)} f(u)du = f(h(x)) \cdot h'(x)$

為何如此? 令

$$F(v) = \int_a^v f(u)du$$

則

$$\int_a^{h(x)} f(u)du = F(h(x))$$

因此, 根據連鎖規則以及 FTC (part 1), 亦即,

$$F'(v) = f(v)$$

得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_a^{h(x)} f(u)du &= \frac{d}{dx}F(h(x)) \\
&= F'(h(x)) \cdot h'(x) \\
&= f(h(x)) \cdot h'(x)
\end{aligned}$$

(b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{g(x)}^{b} f(u)du = -f(g(x)) \cdot g'(x)$

爲何如此? 根據前一單元的黎曼積分的性質以及推廣 (a),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{b} f(u)du &= \frac{d}{dx}\left[-\int_{b}^{g(x)} f(u)du\right] \\ &= -\frac{d}{dx}\int_{b}^{g(x)} f(u)du \\ &= -f(g(x)) \cdot g'(x)\end{aligned}$$

(c) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(u)du$

$$= f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

爲何如此? 任選一點 a 使得 $f(x)$ 在積分範圍內連續, 則根據前一單元的黎曼積分的性質以及推廣 (a),

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{d}{dx}\left[\int_{g(x)}^{a} f(u)du + \int_{a}^{h(x)} f(u)du\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left[\int_{a}^{h(x)} f(u)du - \int_{a}^{g(x)} f(u)du\right] \\ &= f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

例 1. 試求下列各項的導函數.

(a) $F(x)=\int_0^x(\sin u-e^{-u})du,\ x>0$

(b) $G(x)=\int_0^{x^2}(u^3-2)du,\ x>0$

(c) $H(x)=\int_{\sin x}^{1}u^2du,\ x\in R$

(d) $K(x)=\int_{x^2}^{x^3}e^udu,\ x\in R$

<解> (a) 因爲針對 $u>0$, $f(u)=\sin u-e^{-u}$ 是連續的, 故根據 FTC (part 1),

$$F'(x)=\sin x-e^{-x}$$

(b) 因爲對於 $u>0$, $g(u)=u^3-2$ 是連續的, 故根據 FTC (part 1) 的推廣 (a),

$$\begin{aligned}G'(x) &= \left[(x^2)^3-2\right]\cdot\left(x^2\right)' \\ &= 2x(x^6-2)\end{aligned}$$

(c) 當 $u \in R$ 時, $h(u) = u^2$ 是連續的, 所以根據 FTC (part 1) 的推廣 (a) 或 (b),

$$\begin{aligned} H'(x) &= -\frac{d}{dx}\int_1^{\sin x} u^2 du \\ &= -(\sin x)^2 \cdot (\sin x)' \\ &= -\cos x \cdot (\sin x)^2 \end{aligned}$$

(d) 對所有的 $u \in R$, $k(x) = e^u$ 都是連續的, 故根據 FTC (part 1) 的推廣 (c),

$$\begin{aligned} K'(x) &= e^{x^3} \cdot \left(x^3\right)' - e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)' \\ &= 3x^2 e^{x^3} - 2x e^{x^2} \end{aligned}$$

二. 反導函數與不定積分 (Antiderivatives and Indefinite Integrals)

因爲

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = f(x)$$

故

$$\int_a^x f(u)du$$

是 $f(x)$ 的一個反導函數. 因此, $f(x)$ 的一般反導函數 (general antiderivative) 爲

$$\int_a^x f(u)du + C \stackrel{\text{表示成}}{=} \int f(x)dx$$

並稱

$$\int f(x)dx$$

爲 f 的不定積分 (indefinite integral).

註 1. f 的不定積分

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(u)du + C$$

就是 f 的一般反導函數, 即一函數家族使得

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$$

註 2. f 的定積分

$$\int_a^b f(x)dx = f \text{ 在 } [a,b] \text{ 上的黎曼和的極限}$$

等於一數.

例 2. 試求下列各項不定積分.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+\sqrt{x}}{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x - 1}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x} + e^{x/2}\,dx$

<解> (a) 先將被積函數化簡成 $x + x^{-1/2}$, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int x + x^{-1/2} dx \\ &= \int x dx + \int x^{-1/2} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x^{1/2} + C \end{aligned}$$

(b) 化簡後,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{-\cos^2 x} dx \\ &= -\int \sec^2 x dx \\ &= -\tan x + C \end{aligned}$$

(c) 透過逐項積分,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int x^{1/2}dx + \int e^{(1/2)x}dx \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2e^{x/2} + C \end{aligned}$$

註 3. 另外一些求不定積分 (反導函數) 的規則.

1. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$

   因爲

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{1}{\ln a}a^x &= \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}a^x \\ &= \frac{1}{\ln a}\ln a \cdot a^x \\ &= a^x \end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

   因爲

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(-\cot x) &= -(-\csc^2 x) \\ &= \csc^2 x \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

因爲

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

4. $\displaystyle\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

因爲

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(-\csc x) &= -(-\csc x \cot x)\\ &= \csc x \cot x\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$

因爲

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln|\sec x| &= \frac{1}{\sec x}(\sec x)'\\ &= \frac{1}{\sec x}\sec x \tan x\\ &= \tan x\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int \cot x dx = -\ln|\csc x| + C$

因爲

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(-\ln|\csc x|) &= -\frac{1}{\csc x}(-\csc x\cot x)\\ &= \cot x\end{aligned}$$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + C$

因爲

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}x + C$

因爲

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

例 3. 試求下列各不定積分.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

(b) $\int \sec(5x)\tan(5x)dx$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}dx$

(d) $\int 5^{2x}(1-5^{-2x})dx$

<解> (a) 將被積函數化簡成可適用的形式, 再根據適當的求不定積分的規則求之, 過程如下:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx \\ &= \int 1dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= x - \tan^{-1}x + C \end{aligned}$$

(b) 因爲有一個純量積常數 5, 故運用適當的規則時, 需要除以此純量, 而得

$$\text{原式} = \frac{1}{5}\sec(5x) + C$$

(c) 此處的純量積常數爲 2, 故運用適當的規則時, 需要除以 2, 而得

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\sin^{-1}(2x)$$

(d) 經過化簡後, 被積函數中第一項的底數是 5, 且有一純量積常數 2, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int 5^{2x}dx - \int 1dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln 5}\cdot 5^{2x} - x + C \end{aligned}$$

三. 微積分基本定理 (第二部分)

定理. (FTC, part 2). 若 f 在閉區間 $[a,b]$ 上連續且 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 的任一反導函數 (或稱不定積分) 則

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \\ &\overset{\text{表示成}}{=} F(x)\big|_a^b \end{aligned}$$

也就是說, f 在 $[a,b]$ 的定積分 (黎曼和的極限) 等於 f 的不定積分在積分極限 a, b 值的差.

<證> 令

$$G(x) = \int_a^x f(u)du$$

則根據 FTC (part 1),

$$G'(x) = f(x)$$

因此, $G(x)$ 爲 f 的一反導函數. 又因爲 $F(x)$ 亦爲 f 的一反導數, 所以

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_a^x f(u)du \\ &= F(x) + C \end{aligned} \tag{3}$$

代 $x = a$, 得

$$\begin{aligned} G(a) &= \int_a^a f(u)du \\ &= F(a) + C \end{aligned}$$

由此導出

$$0 = F(a) + C$$

故,

$$C = -F(a)$$

因此, 將上式代入 (3) 式, 得

$$\int_a^x f(u)du = F(x) - F(a)$$

最後, 代 $x = b$, 得

$$\int_a^b f(u)du = F(b) - F(a)$$

例 4. 試求下列各項定積分.

(a) $\int_0^1 \left(x^2 - \sqrt{x}\right) dx$

(b) $\int_1^5 \frac{1}{x} dx$

(c) $\int_0^3 2xe^{x^2} dx$

(d) $\int_{-1}^1 e^{-|s|} ds$

<解> 根據微積分基本定理 (第二部分), 須先求出被積函數的不定積分, 再將積分極限代入求差值, 各項的求解過程如下.

(a) 因為 $x^2 - \sqrt{x}$ 在閉區間 $[0,1]$ 上連續, 故由 FTC (part 2),

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left.\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{3/2}\right|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) - (0 - 0) \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

(b) 因爲 $\frac{1}{x}$ 在閉區間 $[1,5]$ 上連續, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \ln|x|\Big|_1^5 \\ &= \ln 5 - \ln 1 \\ &= \ln 5 \end{aligned}$$

(c) 因爲 $2xe^{x^2}$ 在閉區間 $[0,3]$ 上連續, 故

$$\text{原式} = F(x)\Big|_0^3$$

其中

$$F(x) = e^{x^2}$$

(爲何如此? 到目前爲止, 沒有明確的規則可求出 $F(x)$, 故需要某種程度的猜測. 根據微積分的常識 (經驗), 被積函數含一指數函數, 而指數函數又是唯一的一種其導函數等於其本身的函數, 因此一個合理的猜測如上式的 $F(x)$. 再加上連鎖規則的思考, 被積函數的另一部分 $2x$ 剛好就是 x^2 的導函數, 也得到合理的解釋. 最後, 驗證得

$$\frac{d}{dx}e^{x^2} = e^{x^2}\left(x^2\right)' = 2xe^{x^2}$$

剛好就是被積函數. 因此, 對 $F(x)$ 的猜測是正確的.)
接續以上的結果,

$$\text{原式} = e^{3^2} - e^{0^2} = e^9 - 1$$

(d) 被積函數含有絕對值時, 無法直接求定積分, 需要透過適當地分解積分區域而去絕對值後, 再求定積分, 過程如下述. 首先,

$$\text{原式} = \int_{-1}^{0} e^{-|s|} ds + \int_{0}^{1} e^{-|s|} ds$$

接著, 因爲

$$s < 0, \ |s| = -s$$

以及

$$s > 0, \ |s| = s$$

故

$$\begin{aligned}
\text{上式} &= \int_{-1}^{0} e^{-(-s)} ds + \int_{0}^{1} e^{-s} ds \\
&= \int_{-1}^{0} e^{s} ds + \int_{0}^{1} e^{-s} ds \\
&= e^{s}\Big|_{-1}^{0} + (-e^{-s})\Big|_{0}^{1} \\
&= (e^{0} - e^{-1}) + (-e^{-1}) - (-e^{0}) \\
&= 1 - e^{-1} + 1 - e^{-1} \\
&= 2 - 2e^{-1}
\end{aligned}$$

例 5. 設

$$\int_{0}^{x} f(t) dt = \cos(2x) + a$$

試求 $f(x)$ 與 a.

<解> 兩邊對 x 微分, 根據 FTC (part 1) 以及連鎖規則, 由

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx}[\cos(2x)+a]$$

可推導出

$$f(x) = -\sin(2x)\cdot 2 + 0$$

因此,

$$f(x) = -2\sin(2x)$$

接著, 代 $x=0$, 得

$$0 = \int_0^0 f(t)dt = \cos(2\cdot 0) + a = 1 + a$$

所以,

$$a = -1$$

註 1. 使用微積分基本定理時 $f(x)$ 需要在閉區間上連續, 否則會出錯.

反例如下: 設

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, x \in [-2,1], x \neq 0$$

如圖示, 顯示出 $f(x)$ 在 $x=0$ 不連續.

首先, 因為圖形在 x-軸之上, 根據定積分的幾何意義,

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx = \text{圍出區域的面積} > 0 \tag{4}$$

若不檢查 f 是否連續, 而貿然使用的話, 會得出

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}dx &= -\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{1} \\ &= -1-\left(\frac{-1}{-2}\right) \\ &= -1-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} < 0\end{aligned}$$

與 (4) 式不符的矛盾現象.

註. 將被積函數中的自變數 x 轉換成 $ax+b$ 的線性轉換後, 根據連鎖規則, 除了將反導函數 (不定積分) 的 x 換成 $ax+b$ 外, 還要多除一個 x 的係數 a, 也就是說, 已知

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

則

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

爲何成立? 因爲根據不定積分的定義, 即

$$F'(x) = f(x)$$

以及連鎖規則,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right) &= \frac{1}{a}F'(ax+b)(ax+b)' \\ &= \frac{1}{a}f(ax+b)a \\ &= f(ax+b) \end{aligned}$$

故由不定積分的定義,

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

舉例,

(1) 已知

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$$

則

$$\int 3^{\sqrt{2}x-10}dx = \frac{1}{\sqrt{2}\ln 3}3^{\sqrt{2}x-10} + C$$

(2) 已知

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

則

$$\int \sec\left(\frac{2x+3}{5}\right)\tan\left(\frac{2x+3}{5}\right)dx$$
$$= \frac{5}{2}\sec\left(\frac{2x+3}{5}\right)+C$$

(3) 已知

$$\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$$

則

$$\int \tan\left(7-\frac{1}{5}x\right)dx = -5\ln\left|\sec\left(7-\frac{1}{5}x\right)\right| + C$$

(4) 已知

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

則

$$\int \frac{1}{2-3x}dx = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C$$

(5) 已知

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + C$$

則

$$\int \frac{1}{2+3x^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C$$

(6) 已知

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}x+C$$

則

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C$$

註. 微積分基本定理 (第一部分) 的嚴格證明: 定義

$$F(x) = \int_a^x f(u)du,\ a \le x \le b$$

則由 (1) 式知,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)du \tag{5}$$

如圖示.

根據假設 f 在 $[a,b]$ 上連續且當 h 夠小時,

$$[x,x+h]\subset[a,b]$$

故 f 在 $[x,x+h]$ 上亦連續, 且由極值定理, 存在最小值 $m=m(x,h)$ 與最大值 $M=M(x,h)$, 表示 m 與 M 隨 x 與 h 而定, 即

$$m \leq f(u) \leq M,\ u \in [x,x+h]$$

接著, 根據定積分的不等式, 得

$$\int_x^{x+h} m du \leq \int_x^{x+h} f(u) du \leq \int_x^{x+h} M du$$

即

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(u) du \leq Mh$$

同除 h, 得

$$m \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u) du \leq M$$

再由中間值定理, 介於產生 m 與 M 的 u 值間, 存在一 c_h, 當然 $c_h \in [x,x+h]$, 使得

$$f(c_h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u) du \qquad (6)$$

如圖示.

最後, 因為 $x \leq c_h \leq x+h$, 故

$$\lim_{h\to 0} c_h = x$$

且由連續函數的極限性質及 (5) 式, (6) 式與上式, 得

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)du \\ &= \lim_{h\to 0} f(c_h) = f\left(\lim_{h\to 0} c_h\right) = f(x) \end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = f(x)$$