單元 25: 代入法 (積分形式的連鎖規則) (課本 §7.1)

令

$$f(x) = \sin(3x^2+1)$$

問. $f'(x)$ 爲何?

連鎖規則: 令

$$u = 3x^2+1,\ f(u) = \sin u$$

則

$$\sin(3x^2+1) = f(u(x))$$

所以,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin(3x^2+1) &= \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \cos u\cdot(6x)\\ &= \cos(3x^2+1)\cdot 6x\end{aligned}$$

上述求導函數方法的反向過程提示出計算

$$\int 6x\cos(3x^2+1)\,dx$$

的積分方法: 令

$$u = 3x^2 + 1$$

可導出

$$\frac{du}{dx} = 6x \;\Rightarrow\; \text{定義微分式 } du = 6x\,dx$$

然後將 u 與 du 代入原被積函數, 可得一化簡後且容易求反導函數的被積函數 $\cos u$, 如下述:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\cos(3x^2+1)}_{\cos u}\cdot\underbrace{6x dx}_{du} &= \int \cos u\,du \\ &= \sin u + C \\ &= \sin(3x^2+1) + C\end{aligned}$$

註. 上述求不定積分的關鍵乃是以一適當的式子以及相關的量代入原被積函數, 而將其化簡成容易求反導函數的型式. 因此, 可整理成如下的

代入法: 若 $u = g(x)$ 則微分式 $du = g'(x)dx$ 且

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$$

註. 代入法的精神: 當被積函數中有一部分是剩餘部分 (合成函數) 的內部函數的導函數或其純量倍數時, 代入法是一個最直接考量的積分技巧.

例 1. 求下列各項不定積分.

(a) $\int (2x+1)\, e^{x^2+x}\, dx$

(b) $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$

(c) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\, dx$

<解> (a) 因爲被積函數中的 $2x+1$ 剛好是剩餘部分 (合成函數) 的內部函數 x^2+x 的導函數, 此乃提示: 令

$$u = x^2 + x$$

由此導出

$$\frac{du}{dx} = (2x+1) \text{ 或 } du = (2x+1)dx$$

將 u 與 du 代入, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \underbrace{e^{x^2+x}}_{e^u} \underbrace{(2x+1)dx}_{du} \\ &= \int e^u du \\ &= e^u + C \\ &= e^{x^2+x} + C \end{aligned}$$

(b) 求積分的一個重要關鍵乃是辨識能力, 此可透過多次的練習而提昇之. 如, 需要辨識出

$$原式 = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx$$

且被積函數中的 $\frac{1}{\ln x}$ 爲一合成函數, 其內部函數 $\ln x$ 的導函數剛好就是就是剩餘的部分 $\frac{1}{x}$. 因此, 用代入法, 令

$$u = \ln x \ \Rightarrow \ du = \frac{1}{x} dx$$

得,

$$\begin{aligned} 原式 &= \int \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{1/u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{du} \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln |u| + C \\ &= \ln |\ln x| + C \end{aligned}$$

(c) 與 (b) 小題爲同一類型, 因爲可辨識出

$$原式 = \int \frac{1}{x^2 + 3x} \cdot (2x + 3) dx$$

以及被積函數中的 $\frac{1}{x^2+3x}$ 爲一合成函數, 其內部函數的導函數剛好是剩餘的部分 $2x + 3$. 此乃提示採用代入法,

故令

$$u = x^2 + 3x \;\Rightarrow\; du = (2x+3)dx$$

並得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \underbrace{\frac{1}{x^2+3x}}_{1/u} \cdot \underbrace{(2x+3)dx}_{du} \\ &= \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|x^2+3x| + C \end{aligned}$$

註. 整理前面的例子, 可得如下的積分類型:

(1) $\displaystyle\int g'(x)e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + C$

因爲令

$$u = g(x) \;\Rightarrow\; du = g'(x)dx$$

可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \underbrace{e^{g(x)}}_{e^u} \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{du} \\ &= \int e^u\,du \\ &= e^u + C \\ &= e^{g(x)} + C \end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$

因為令

$$u = g(x) \;\Rightarrow\; du = g'(x)dx$$

可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \underbrace{\frac{1}{g(x)}}_{1/u} \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{du} \\ &= \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|g(x)| + C \end{aligned}$$

例 2. 試求下列各項不定積分 (du 不會剛好出現在被積函數中, 但好到只差一個純量積因子).

(a) $\displaystyle\int 4x\sqrt{x^2+1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

<解> (a) 首先可辨識出被積函數中, 合成函數的內部函數爲 x^2+1, 故令

$$u = x^2 + 1 \;\Rightarrow\; du = 2xdx$$

雖然 du 不會剛好是被積函數中剩餘的部分, 但僅差一個純量積因子, 故可調整而得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int 2\sqrt{x^2+1}\cdot(2x)dx \\
&= \int 2\sqrt{u}du \\
&= 2\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C \\
&= \frac{4}{3}(x^2+1)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

(b) 首先可將原式改寫成

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

因爲其爲一分式, 故根據註解中的積分類型或辨識出合成函數的內部函數, 可令

$$u = \cos x \;\Rightarrow\; du = -\sin dx$$

因此, 根據 du 適當地調整純量積因子後, 可得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{-1}{\cos x}\cdot(-\sin x)dx \\
&= \int \frac{-1}{u}du
\end{aligned}$$

一個熟悉的不定積分式子. 故根據對應的積分規則, 進一步積分得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C \\ &= \ln|\cos x|^{-1} + C \\ &= \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

一個前面單元所提過的不定積分的規則.

註. 同理, 可導出

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

例 3. 試求下列各項不定積分.

(a) $\int x\sqrt{2x-1}\, dx$

(b) $\int \tan x \sec^2 x\, dx$

(c) $\int \frac{g'(x)}{[g(x)]^2+1}\, dx$

(d) $\int \sqrt{1+\ln x}\,\frac{\ln x}{x}\,dx$

<解> 代入法的關鍵在於適當地選取 u, 以致於可將被積函數中剩餘的部分寫成 du 的一個純量積, 而將原式化簡成一個可以使用已知規則求積分的式子. 選取 u 的熟練及準確程度可經由多練習而不斷地提昇.

(a) 此問題的困難處在於根號內有多項的和或差, 而不是僅僅一項, 而能將其改寫成純量乘以 $x^{1/2}$, 然後再求不定積分. 因此, 針對此困難處, 可考慮令

$$u = 2x - 1$$

則

$$du = (2x-1)'dx = 2dx$$

或

$$dx = \frac{1}{2}du$$

以及

$$x = \frac{1}{2}(u+1)$$

接著, 將上面各項代入, 使被積函數由原來以 x 爲自變數的型式, 完全地改成以 u 爲自變數的型式, 而得

$$\text{原式} \;=\; \int \frac{1}{2}(u+1)\cdot\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du$$

整理並逐項積分, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{4}\int\left(u^{3/2}+u^{1/2}\right)du \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{5/2}+\frac{2}{3}u^{3/2}\right)+C \\
&= \frac{1}{10}(2x-1)^{5/2}+\frac{1}{6}(2x-1)^{3/2}+C
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int\frac{1}{2}\underbrace{x}_{(u+1)/2}\cdot\underbrace{\sqrt{2x-1}}_{\sqrt{u}}\cdot\underbrace{2dx}_{du} \\
&= \frac{1}{2}\int\frac{1}{2}(u+1)\sqrt{u}du \\
&= \frac{1}{4}\int\left(u^{3/2}+u^{1/2}\right)du \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

(b) 令

$$u=\tan x \ \Rightarrow\ du=(\tan x)'dx=\sec^2 x dx$$

因此,

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int u du \\
&= \frac{1}{2}u^2+C \\
&= \frac{1}{2}\tan^2 x+C
\end{aligned}$$

或令

$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad du = (\sec x)' dx = \sec x \tan x dx$$

以及

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \sec x \cdot \sec x \tan x dx \\ &= \int u du \\ &= \frac{1}{2} u^2 + C \\ &= \frac{1}{2} \sec^2 x + C \end{aligned}$$

註. 此二解法的答案在外形上似乎不同, 但實質上它們是相同的, 因爲根據三角恆等式

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

第二個方法所得的答案

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sec^2 x + C &= \frac{1}{2}(1 + \tan^2 x) + C \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x + \left(\frac{1}{2} + C\right) \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x + C \end{aligned}$$

此乃因爲 $\frac{1}{2} + C$ 也是任一常數, 故可以 C 簡單地表示, 而得到第一個方法計算出的答案. 這種在外形上似乎不同,

而實質上是相同的結果的現象, 是會出現的, 通常可用一些恆等式說明它們是一樣的.

(c) 由被積函數的型式, 很自然地會令

$$u = g(x) \;\Rightarrow\; du = g'(x)dx$$

以及

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{1+[g(x)]^2} \cdot g'(x)dx \\ &= \int \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \tan^{-1} u + C \\ &= \tan^{-1} g(x) + C \end{aligned}$$

(d) 根據累積的經驗, 因爲含根號的部分爲一合成函數, 故先考慮令根號內的式子爲 u, 亦即,

$$u = 1 + \ln x$$

則

$$du = \frac{1}{x} dx$$

以及

$$\ln x = u - 1$$

因此, 代入後, 可得到以 u 爲自變數而且較容易積分的式子, 過程如下:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \sqrt{1+\ln x}\cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}dx \\
&= \int \sqrt{u}(u-1)du \\
&= \int \left(u^{3/2}-u^{1/2}\right)du \\
&= \frac{2}{5}u^{5/2}-\frac{2}{3}u^{3/2}+C \\
&= \frac{2}{5}(1+\ln x)^{5/2}-\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}+C
\end{aligned}$$

例 4. 試求下列各項定積分.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2+1}{x^3+x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2}\,e^{1/x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos x\, e^{\sin x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_4^9 \frac{2}{x-3}\,dx$

<解> (a) 方法 1: 先求以 x 爲自變數的不定積分, 再將 x 的積分極限代入.

因爲分子剛好是分母的導函數, 故令

$$u = x^3 + x \;\Rightarrow\; du = (3x^2+1)dx$$

以及

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+1}{x^3+x}dx &= \int \frac{1}{u}du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|x^3+x| + C\end{aligned}$$

由 FTC (part 2),

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \ln|x^3+x|\Big|_{x=1}^{2} \\ &= \ln|8+2| - \ln|1+1| \\ &= \ln 10 - \ln 2 \\ &= \ln\left(\frac{10}{2}\right) \\ &= \ln 5\end{aligned}$$

方法 2: 直接以代入法, 將以 x 爲自變數的式子改成以 u 爲自變數的式子, 並將 x 的積分極限換成 u 的積分極限, 再求定積分.

令

$$u = x^3 + x \;\Rightarrow\; du = (3x^2 + 1)dx$$

以及

$$\begin{aligned} x = 1 &\;\Rightarrow\; u = 1^3 + 1 = 2 \\ x = 2 &\;\Rightarrow\; u = 2^3 + 2 = 10 \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{3x^2+1}{x^3+x}\,dx &= \int_2^{10} \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln|u|\Big|_{u=2}^{10} \\ &= \ln 10 - \ln 2 \\ &= \ln 5 \end{aligned}$$

(b) 被積函數式是所提過的第一種類型 $g'(x)e^{g(x)}$, 故令

$$u = \frac{1}{x} \;\Rightarrow du = -\frac{1}{x^2}dx$$

或

$$-du = \frac{1}{x^2}\,dx$$

以及

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2} &\;\Rightarrow\; u = \frac{1}{1/2} = 2 \\ x = 1 &\;\Rightarrow\; u = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x^2} e^{1/x}\,dx &= -\int_{2}^{1} e^u\,du \\ &= -e^u\Big|_2^1 \\ &= -e^1 - (-e^2) \\ &= e^2 - e\end{aligned}$$

(c) 與 (b) 小題是同一類型, 故令

$$u = \sin x \ \Rightarrow\ du = \cos x dx$$

以及

$$\begin{aligned} x = 0 &\ \Rightarrow\ u = \sin 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{6} &\ \Rightarrow\ u = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi/6} \cos x e^{\sin x}\,dx &= \int_0^{1/2} e^u\,du \\ &= e^u\Big|_0^{1/2} \\ &= e^{1/2} - 1\end{aligned}$$

(d) 因爲分母的導函數是分子的純量積, 是所提過的第二種類型, 故令

$$u = x - 3 \ \Rightarrow\ du = dx$$

以及

$$\begin{aligned} x = 4 \;&\Rightarrow\; u = 4 - 3 = 1 \\ x = 9 \;&\Rightarrow\; u = 9 - 3 = 6 \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{2}{x-3}\,dx &= \int_1^6 \frac{2}{u}\,du \\ &= 2\ln|u|\Big|_1^6 \\ &= 2(\ln 6 - \ln 1) \\ &= 2\ln 6 \end{aligned}$$